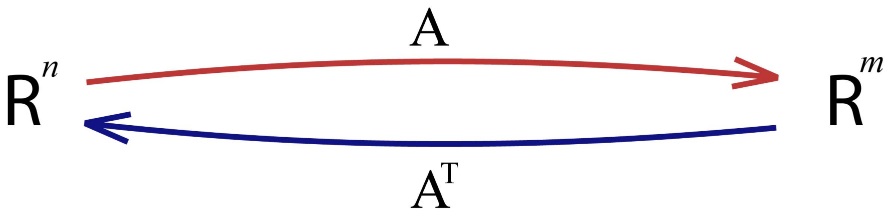


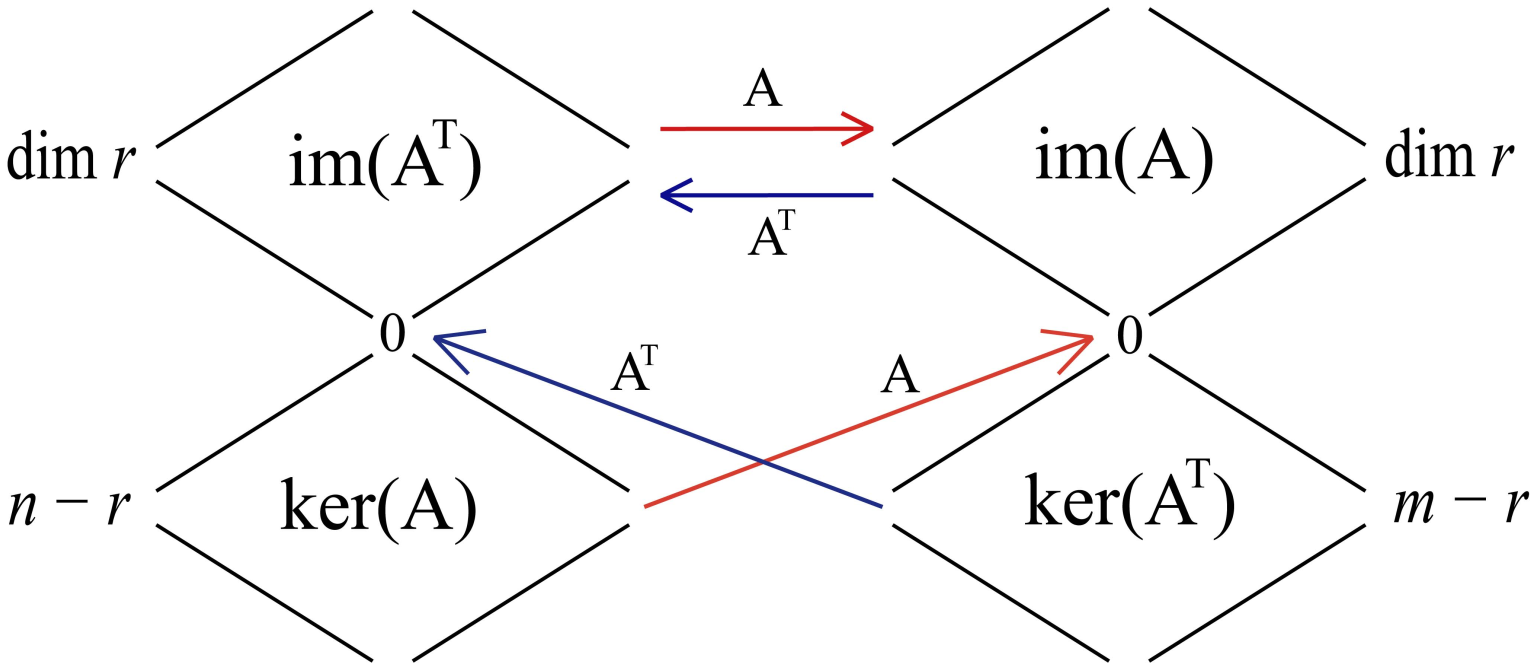


# 线性代数 A 习题课讲义集

作者：Caiyou Yuan

时间：October 5, 2021

# 特别声明

这里主要整理了作者在担任北京大学线性代数 A 这门课程的助教期间，在习题课上讲解的一些题目，主要参考了，

1. 高等代数（第三版）丘维声，高等教育出版社
2. 高等代数学习指导书（第二版）丘维生，清华大学出版社

以及一些其他书籍。

作者能力有限，难免有考虑不周和疏漏之处，欢迎批评指正。

Caiyou Yuan<br>October 5, 2021

# 目录

# 第 1 章 线性方程组

- 矩阵的初等行变换
- 阶梯形矩阵，简化阶梯形矩阵
- Guass-Jordan 算法, 无解/有唯一解/有无数解
- 数域, $Q, R, C$

## 例题

1. 证明任意一个矩阵都可以经过一系列初等行变换化为 (简化) 阶梯形矩阵.

2. 解如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} = 2 \\ x_3 + x_4 + \cdots + x_{n+2} = 3 \\ \vdots \\ x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n} = n+1 \end{cases}$$

3. 解如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = b_1 \\ nx_1 + x_2 + \cdots + (n-2)x_{n-1} + (n-1)x_n = b_2 \\ (n-1)x_1 + nx_2 + \cdots + (n-3)x_{n-1} + (n-2)x_n = b_3 \\ \vdots \\ 2x_1 + 3x_2 + \cdots + nx_{n-1} + x_n = b_n \end{cases}$$

其中 $b_1, \cdots b_n$ 为给定常数

# 第 2 章 行列式

## 2.1 n 元排列

- 逆序数
- 奇/偶排列

### 例题

1. 设 $1, 2, \cdots, n$ 的 $n$ 元排列 $a_1 a_2 \cdots a_k b_1 b_2 \cdots b_{n-k}$ 有

$$\tau(a_1 a_2 \cdots a_k) = \tau(b_1 b_2 \cdots b_{n-k}) = 0$$

那么 $\tau(a_1 a_2 \cdots a_k b_1 b_2 \cdots b_{n-k})$ 是多少? $n, k, a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_{n-k}$ 均已知, $\tau(a_1 a_2 \cdots a_k)$ 表示排列 $a_1 a_2 \cdots a_k$ 的逆序数.

2. 说明 n(n>1) 元排列中，奇偶排列各占一半

3. (1) 若 $\tau(a_1 a_2 \cdots a_n) = r$, 那么 $\tau(a_n a_{n-1} \cdots a_1)$ 是多少?

   (2) 计算所有 n 元排列的逆序数之和

## 2.2 n 阶行列式的定义

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} \\ &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \end{aligned}$$

注 如何从上一行定义，导出下一行定义？见课本[1]24-25 页

### 例题

1. 下列行列式是 $x$ 的几次多项式, 求出 $x^4$ 项和 $x^3$ 项的系数

$$\begin{vmatrix} 5x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & -x \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

2. 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

## 2.3 行列式的性质

### 例题

- 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

  其中 $a_i \neq 0, i = 1, \cdots, n$.

## 2.4 行列式按一行 (列) 展开

- 余子式, 代数余子式
- Vandermonde 行列式 (行列式的递推)

**注** 按行展开如何从行列式定义推导?

## 例题

1. 计算下列行列式

(1)

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

2. 计算如下行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$$

## 2.5 Cramer 法则

### 例题

1. 对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \ldots \quad B_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

证明:

a. 当 $\det A \neq 0$ 时，方程组有唯一解；

b. 当 $\det A \neq 0$ 时，方程组的唯一解为

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

## 2.6 行列式按多行展开

### 例题

1. 证明

$$(\det A)(\det B) = \det C$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

提示，考虑如下 $2n$ 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

# 第 3 章 n 维向量空间

## 3.1 $K^n$ 及其子空间

- $K^n$ 的定义 (有限维线性空间的典例)
- 子空间
- 线性表出（求解线性方程组的另一个角度)

## 3.2 线性相关/无关

- 原向量组线性相关/无关，部分组如何?
- 部分组线性相关/无关，该向量组如何?
- 原向量组线性相关/无关，延伸组/缩短组如何?

### 例题

1. 设数域 $K$ 上 $m \times n$ 矩阵 $H$ 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 证明：$H$ 的任意 $s$ 列 $(s \le \min\{m, n\})$ 都线性无关当且仅当，$Hx = 0$ 的任意非零解的非零分量大于 $s$

## 3.3 极大线性无关组，向量组的秩

- 向量组的等价
- 极大线性无关组: 向量组及其极大线性无关组等价
- 向量组的秩: 向量组的极大线性无关组的向量数目相同
- 如果向量组 I 可以由向量组 II 线性表出，则二者的秩有大小关系

### 例题

1. 设数域 $K$ 上 $s \times n$ 矩阵 $(s \le n)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

满足

$$2|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, s$$

证明：$A$ 的行向量的组的秩等于 $s$.

2. 证明两个向量组等价的充要条件是：秩相等且其中一个向量组可以被另一个线性表出。

3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 $r$, 在其中任取 $m$ 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m}$, 证明此向量组的秩 $\geq r+m-s$.

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ 的秩分别为 $r_1, r_2, r_3$. 证明
$$\max(r_1, r_2) \leq r_3 \leq r_1 + r_2$$

## 3.4 基, 维数

- 基
- 维数

## 3.5 矩阵的秩

- 行秩等于列秩，即为矩阵的秩；如何说明?
- 任意非零矩阵的秩等于其非零子式的最高阶数; 如何说明?

### 例题

1. 证明:
$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

2. 证明：如果 $m \times n$ 矩阵 $A$ 的秩为 $r$, 则它的任意 $s$ 行组成的子矩阵，秩不小于 $r+s-m$.

## 3.6 线性方程组有解的充要条件

- 系数矩阵和增广矩阵有相同的秩

## 3.7 齐次/非齐次线性方程组的解

- 齐次/非齐次线性方程组的解集是一个子空间/陪集

## 例题

1. 用行列式给出三点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3,$ 不在一条直线上的充要条件

2. 给出通过不在一条直线上三点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3,$ 的圆的方程

3. 证明: 通过有理数坐标的三点的圆，其圆心坐标也是有理数

4. 求三个平面
$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$
通过一条直线但是不合并为一个平面的充分必要条件.

# 第 4 章 矩阵

## 4.1 矩阵的运算和特殊矩阵

- 相同行列数目的矩阵全体在加法和数乘下构成线性空间
- 矩阵的乘法 (线性映射的复合, 有限维线性映射的典型)

### 例题

1. (矩阵的幂次)

   (a)

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

   计算 $A^m$, 其中 $m$ 为正整数.

   (b)

   $$J = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{bmatrix}_{n\times n}$$

   计算 $J^m$, 其中 $m$ 为正整数.

2. 证明: 反对称矩阵的秩为偶数

## 4.2 矩阵相乘的秩与行列式

- $\mathrm{rank}(AB) \le \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$
- 实数域上，$\mathrm{rank}(A^TA) = \mathrm{rank}(A)$
- Binet-Cauchy 公式

### 例题

1. 举例说明，对于复矩阵 $A$, 有可能 $\operatorname{rank}(A^TA) \neq \operatorname{rank}(A)$

2. 证明，对于实数域上的任意 $s \times n$ 矩阵 $A$, 都有 $\operatorname{rank}(AA^TA) = \operatorname{rank}(A)$

3. 设 $A, B$ 分别是数域 $K$ 上的 $s \times n, n \times m$ 矩阵，证明：如果 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$, 那么对于任意的数域 $K$ 上的 $m \times r$ 的矩阵 $C$, 都有
$$\operatorname{rank}(ABC) = \operatorname{rank}(BC).$$

4. 计算如下矩阵的行列式
$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{bmatrix}$$

## 4.3 可逆矩阵

- $\det A \neq 0$ 是方阵 $A$ 可逆的充分必要条件
- 可逆矩阵可以表示为若干初等矩阵的乘积

### 例题

1. (不可约对角占有矩阵) 求如下矩阵的逆矩阵
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

2. ($AB$ 和 $BA$ 的非零谱相同) $A$,$B$ 分别为 $n\times m$ 和 $m\times n$ 的矩阵
   (a). 证明, 若 $I_n-AB$ 可逆，则 $I_m-BA$ 也可逆.

   (b). 证明 $\lambda^m\det(\lambda I_n-AB)=\lambda^n\det(\lambda I_m-BA)$

## 4.4 分块矩阵

### 例题

1. (矩阵的 LU 分解) 证明: 如果 $A$ 的所有顺序主子式不等于零，则存在可逆的下三角矩阵 $L$, 使得 $LA$ 是上三角矩阵

## 4.5 正交矩阵和欧氏空间

- 正交矩阵的定义和性质 (实数域)
- 欧氏空间的内积 (对称正定的双线性函数)
- Schmidt 正交化

### 例题

1. (矩阵的 QR 分解) 证明: 可逆矩阵 $A$, 可以唯一分解为正交矩阵 $Q$ 与主对角元都是正数的上三角矩阵 $R$ 的乘积

2. $A$ 是 $s\times n$ 的实矩阵, 说明 $A^T$ 的像空间和 $A$ 的核空间正交, 即在两空间中各自任意取一个向量，内积均为零

3. (最小二乘) $A$ 是 $m\times n$ 的实矩阵, $m>n$, $b\in\mathbb{R}^n$, 如果存在 $x_0$ 使得，对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$,
$$|Ax_0-b|^2\le|Ax-b|^2$$

则称 $x_0$ 是 $Ax=b$ 的最小二乘解. 证明 $x_0$ 是最小二乘解，当且仅当 $x_0$ 是如下线性方程组的解

$$A^TAx = A^Tb$$

## 4.6 线性映射

- $\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im} A) = \dim(K^n)$

### 例题

1. 设 $S$ 是一个有限集合, 映射 $f: S \to S$, 证明: $f$ 为单射和 $f$ 为满射互相等价.

2. 上一题结论在 $S$ 不是有限集合的时候成立么？若成立，请证明；不成立给出反例

3. 设 $V$ 是一个有限维线性空间, 线性映射 $L: V \to V$, 证明: $L$ 为单射和 $L$ 为满射互相等价.

# 第 5 章 矩阵相抵和相似

## 5.1 矩阵相抵

- 如果矩阵 $A$ 可以通过初等行/列变换为矩阵 $B$, 则称 $A, B$ 相抵
- 矩阵相抵是 $M_{m\times n}(K)$ 上的一个等价关系
- $M_{m\times n}(K)$ 中的两矩阵相抵当且秩相等

### 例题

1. 设 $A, B, C$ 分别是数域 $K$ 上 $s\times n, p\times m, s\times m$ 矩阵, 证明矩阵方程 $AX - YB = C$ 有解的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

## 5.2 广义逆矩阵

- (矩阵相抵标准型的应用) 如果 $A$ 的相抵标准型为

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

  其中 $P, Q$ 分别是 $s, n$ 级可逆矩阵, 那么矩阵方程 $AXA = A$ 通解为

$$X = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & B \\ C & D \end{bmatrix}P^{-1}$$

  其中 $B, C, D$ 分别是任意的 $r\times(s-r), (n-r)\times r, (n-r)\times(s-r)$ 矩阵. 证明?
- 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的通解为 $X = A^{-}\beta$, 其中 $A^{-}$ 是 $A$ 的任意一个广义逆. 证明?

### 例题

1. (广义逆的一个充分必要条件) 设 $A, B$ 分别是数域 $K$ 上的 $s\times n, n\times s$ 的矩阵
   (a) 证明 $\operatorname{rank}(A - ABA) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - BA) - n$

(b) 证明 $B$ 是 $A$ 的一个广义逆的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(I-BA)=n$.

2. (两两正交的幂等矩阵的充分必要条件) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都是数域 $K$ 上的 $n$ 级矩阵
   (a) 令 $D=\mathrm{diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_s\}$, $E=(\underbrace{I_n, I_n, \cdots, I_n}_{s个})$. 证明:$A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都是幂等矩阵，且 $A_iA_j=0$(当 $i\neq j$) 的充分必要条件是 $E^TE$ 是 $D$ 的一个广义逆.

   (b) 令 $A=\sum_{i=1}^{s} A_i$, 证明:$A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都是幂等矩阵，且 $A_iA_j=0$(当 $i\neq j$) 的充分必要条件是 $A$ 是幂等矩阵，且 $\mathrm{rank}(A)=\sum_{i=1}^{s}\mathrm{rank}(A_i)$.

## 5.3 矩阵的相似和对角化

- 相似矩阵有相同的行列式，秩，迹，特征多项式，特征值
- $n$ 级矩阵可对角化的充分必要条件是有 $n$ 个线性无关的特征向量
- 如何求矩阵的所有线性无关的特征向量?

### 例题

1. (Frobenius 矩阵) 复数域上的矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

   $A$ 是否可以对角化? 若是求它的所有特征值和特征向量, 若否说明原因.

## 5.4 实对称矩阵的对角化

- 实对称矩阵在实数域上有特征值
- 实对称矩阵一定正交相似于对角矩阵

### 例题

1. (复 Schur 分解) 定义 $U^H$ 表示矩阵的共轭转置, 若 $U^HU=I$, 则称方阵 $U$ 为酉矩阵. 证明对任意的复数方阵 $A$, 存在酉矩阵 $U$，使得 $U^HAU$ 为上三角矩阵.

2. (实 Schur 分解) 证明，对任意的实数方阵, 存在实正交矩阵 $U$，使得 $U^TAU$ 为分块上三角矩阵, 形如

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1r} \\ & T_{22} & \cdots & T_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & T_{rr} \end{bmatrix}$$

其中 $T_{ii}$ 为 1 阶或 2 阶矩阵, 且当是 2 阶矩阵，其特征值是一对共轭复根.

## 5.5 二次型和矩阵合同

- 数域 $K$ 上的任一对称矩阵都合同于一个对角矩阵 (合同标准形)
- 合同标准形并不唯一; 实对称矩阵的规范形是唯一的 (惯性定律); 复对称矩阵呢?
- $n$ 阶实对称矩阵是正定的，当且仅当正惯性指数为 $n$/特征值全大于 0/所有顺序主子式大于 0

### 例题

1. 设实二次型

$$f(x_1, \cdots, x_n) = l_1^2 + \cdots + l_s^2 - l_{s+1}^2 - \cdots - l_{s+u}^2$$

其中 $l_i$ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的一次齐次多项式. 证明 $f$ 的正惯性指数 $p \le s$, 负惯性指数 $q \le u$.

2. (复对称矩阵的合同) 证明, 复对称矩阵 $A, B$ 合同的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

3. 证明, 如果 $A, B$ 都是 $n$ 级正定矩阵，那么 $AB$ 是正定矩阵的充要条件是 $AB = BA$.

4. (Hadamard 不等式)

   (a) 证明: 如果 $A$ 是 $n$ 级正定矩阵, $B \neq 0$ 是 $n$ 级半正定矩阵, 那么

$$|A + B| > \max\{|A|, |B|\}$$

   (b) 证明: 若

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}$$

   是正定矩阵. 证明 $|M| \le |A||D|$, 等号成立当且仅当 $B = 0$.

(c) 证明：如果 $C=(c_{ij})$ 是 $n$ 级实矩阵, 则

$$|C| \leq \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_{ij}^2}$$

这说明, 欧氏空间中,$n$ 个向量张成的超多面体的体积不超过这 $n$ 个向量的长度乘积.

4. (正定矩阵的平方根分解) 证明: 对于正定矩阵 $A$, 存在唯一的正定矩阵 $C$, 使得 $A=C^2$.

5. (极坐标分解) 证明任意实可逆矩阵 $A$, 可以被唯一分解为

$$A = TS_1 = S_2T,$$

其中 $T$ 为正交矩阵, $S_1, S_2$ 为正定矩阵.

6. (SVD 分解)

(a) 证明任意的实可逆矩阵 $A$, 都存在正交矩阵 $T_1, T_2$, 使得

$$A = T_1 \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} T_2,$$

其中 $\lambda_i$ 是 $A^TA$ 特征值的平方根. 这个分解具有唯一性么?

(b) $A$ 不可逆的时候呢?

# 参考文献

[1] 丘维生. 高等代数（第三版）上册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.