线性代数 A 习题课讲义 01

Caiyou Yuan

March 15, 2021

7.1

- 一元多项式的概念和运算
- 环的基本概念；关于加法构成交换群，乘法具有结合律，加法乘法具有左右分配律
- 一元多项式环 $K[x]$ 的通用性质

例题

1. R 是有单位元 $1(\neq 0)$ 的环，若对于 $a \in R, \exists b \in R$, s.t. $ab = ba = 1$, 则称 b 为 a 的逆. 证明 a 的逆是唯一的.
2. 设 R 是一个环，证明: $0a = a0 = 0, \forall a \in R; \forall a, b \in R, a(-b) = -ab$.
3. 设 $A \in M_n(C)$, 设
$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s},$$
其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是两两不同的复数，$l_1 + l_2 + \cdots + l_s = n$. 证明，对于 $k \in C$, $k \neq 0$, 矩阵 kA 的特征多项式为
$$|\lambda I - kA| = (\lambda - k\lambda_1)^{l_1}(\lambda - k\lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - k\lambda_s)^{l_s},$$
A^3 的特征多项式为
$$|\lambda I - A^3| = (\lambda - \lambda_1^3)^{l_1}(\lambda - \lambda_2^3)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s^3)^{l_s}.$$

7.2

- 整除关系
- 带余除法; 主要思路：对被除式的次数用数学归纳法

例题

1. 设 $d, n \in N^*$, 则 $K[x]$ 中，$x^d - 1 | x^n - 1 \Leftrightarrow d | n$.

7.3

- 最大公因式: $K[x]$ 中任意两个多项式都有最大公因式，且可以表示为 f, g 的和式;
- 互素

例题

1. 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, $a, b, c, d \in K$ 而且 $ad - bc \neq 0$. 证明，$(af(x) + bg(x), cf(x) + dg(x)) = (f(x), g(x))$.
2. 设 $A \in M_n(K)$, $f(x), g(x) \in K[x]$, 证明, 如果 $d(x) = (f(x), g(x))$, 那么 $d(A)x = 0$ 的解空间是 $f(A)x = 0$ 解空间和 $g(A)x = 0$ 解空间的交.
3. 在 $K[x]$ 中，如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 并且 $deg\, f > 0, deg\, g > 0$, 那么在 $K[x]$ 中存在唯一的多项式 $u(x), v(x)$, $deg\, u < deg\, g$, $deg\, v < deg\, f$, s.t.
$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$
4. 在 $K[x]$ 中，如果 $(f(x), g(x)) = d(x)$, 那么在 $K[x]$ 中存在唯一的多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$, $deg\, u < deg\, g - deg\, d$, $deg\, v < deg\, f - deg\, d$, s.t.
$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x).$$
5. 在 $K[x]$ 中的两个非零多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不互素的充分必要条件是, 存在两个非零多项式 $u(x), v(x)$, s.t. $u(x)f(x) = v(x)g(x)$ 且 $deg\, u < deg\, g$, $deg\, v < deg\, f$.
6. 在 $K[x]$ 中，$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 两两互素，证明对于任意的 $r_1(x), r_2(x), \cdots, r_s(x) \in K[x]$, 同余方程组
$$\begin{cases} g(x) \equiv r_1(x) \mod f_1(x) \\ g(x) \equiv r_2(x) \mod f_2(x) \\ \qquad \vdots \\ g(x) \equiv r_s(x) \mod f_s(x) \end{cases}$$
在 $K[x]$ 中有解，且若 $c(x), d(x)$ 均为解，则 $c(x) \equiv d(x), \mod f_1 f_2 \cdots f_s$.

7.4

- 不可约多项式
- 唯一因式分解定理；这里唯一性的意义是？

例题

1. 在 $K[x]$ 中，设 $(f, g_i) = 1, i = 1, 2$. 证明 $(fg_1, g_2) = (g_1, g_2)$.
2. 在 $K[x]$ 中, 证明对于任意的正整数 m, 有 $(f^m(x), g^m(x)) = (f(x), g(x))^m$.
3. 分别在复数域、实数域和有理数域上分解 $x^4 + 1$ 为不可约多项式的乘积