# 线性代数 A 习题课讲义 03

Caiyou Yuan

April 12, 2021

---

**8.4**

- 商空间
- $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$

**例题**

1. 设 $U, W$ 都是域 F 上线性空间 $V$ 的子空间, 证明 $(U+W)/W \cong U/(U\cap W)$

2. 设 $V$ 是域 F 上的一个 $n$ 维线性空间, $(n \geq 3)$. $U$ 是 $V$ 的一个 2 维子空间，用 $\Omega_1$ 表示 V 中包含 U 的所有 $n-1$ 维子空间组成的集合，用 $\Omega_2$ 表示商空间 $V/U$ 的所有 $n-3$ 维子空间组成的集合，令

$$\begin{aligned}\sigma: \quad \Omega_1 &\longrightarrow \Omega_2 \\ W &\longrightarrow W/U.\end{aligned}$$

   证明: $\sigma$ 是双射.

**9.1-4**

- 线性映射，线性变换，线性函数
- 线性映射的核与像：
  1. $\dim(\mathrm{Ker}A) + \dim(\mathrm{Im}A) = \dim V$
  2. 有限维线性变换，单等价于满
- 线性映射的矩阵表示:
  1. $Hom(V, V') \cong M_{s\times n}(F)$
  2. 相似矩阵 $\Longleftrightarrow$ 线性变换在不同基下的表示
- 线性映射的行列式，秩，迹，特征值，特征向量等

## 例题

1. (Frobenius 秩不等式) 设 $V, U, W, M$ 都是域 F 上的线性空间, 并且 $V, U$ 都是有限维的, 设 $A \in Hom(V, U), B \in Hom(U, W), C \in Hom(W, M)$. 证明，

$$\text{rank}(CBA) \geq \text{rank}(CB) + \text{rank}(BA) - \text{rank}(B).$$

2. (幂零矩阵的矩阵表示) 设 V 是域 $F$ 上的 n 维线性空间，A 是 V 上的一个线性变换. 如果 $A^{n-1} \neq 0, A^n = 0$, 那么在 V 中存在一个基，使得 A 在此基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

3. 设 $V$ 和 $V'$ 分别是域 $F$ 上 n 维，s 维线性空间，A 是 $V$ 到 $V'$ 的一个线性映射，证明存在 $V$ 的一个基和 $V'$ 的一个基，使得 A 在这对基下的矩阵为,

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $r = \text{rank}(A)$.

4. (两两正交的幂等变换的充要条件) 设 $A_i \in M_n(K)$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 其中 $K$ 是数域. 令 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_s$.

(1) 证明: 如果

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A_1) + \text{rank}(A_2) \cdots + \text{rank}(A_s),$$

那么

$$AM_n(K) = A_1 M_n(K) \oplus A_2 M_n(K) \oplus \cdots \oplus A_s M_n(K).$$

(2) 证明: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两正交的幂等矩阵, 当且仅当 $A$ 是幂等矩阵，并且

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_1) + \operatorname{rank}(A_2) \cdots + \operatorname{rank}(A_s).$$

5. (对角化和数域相关) 设 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是有理数域 Q 上的一个不可约多项式，$n > 1$，$\omega$ 是 $f(x)$ 的一个复根. 把 $C$ 看成是 $Q$ 上的线性空间，令

$$\begin{aligned} \mathbf{B}: \quad & Q[x] \longrightarrow C \\ & g(x) \longrightarrow g(\omega). \end{aligned}$$

(1) $\mathbf{B}$ 是不是一线性映射？若是，给出 Im$\mathbf{B}$ 的一个基和维数;

(2) 令 $\mathbf{A}(z) = \omega z, \forall z \in \mathrm{Im}\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ 是不是 Im$\mathbf{B}$ 上的线性变换？如果是，求 $\mathbf{A}$ 在 (1) 中基下的矩阵 A；

(3) $\mathbf{A}$ 是否可以对角化?

(4) 把矩阵 $A$ 看成是复数域上的矩阵，该矩阵可以对角化么?