主理想整环上的有限生成模

Caiyou Yuan

December 23, 2021

---

1 出发点

当研究线性空间 V 上的线性映射时, 域 F 上的线性空间 V, 也可以看作是主理想整环 $F[x]$ 上的模. 通过这个角度, 可以自然推导出线性映射的有理/Jordan 标准型. 这里主要参考了 Steven Roman 的 Advanced Linear Algebra.

2 预备知识

关于群/环/域的定义, 这里略去.

2.1 主理想整环

Definition 1. *对于环 R, 非零元 $r \in R$ 被称为零因子 (zero divisor), 如果存在非零元 $s \in R$, 使得 $st = 0$. 带单位元的交换环 R, 如果没有零因子, 则被称为整环.*

Definition 2. *环 R 的子集 I, 如果满足*

1. $a - b \in I, \forall a, b \in I$
2. $ab \in I, ba \in I, \forall a \in R, b \in I$

则被称为理想.

Remark. *对于 $a \in R$, $I = \{ra, r \in R\}$ 是理想. 这种由单个元素生成的理想, 被称为主理想.*

Definition 3. *主理想整环, 即是所有理想均为主理想的整环.*

Remark. *域 F 上的多项式 $F[x]$ 是一个主理想整环.*

2.2 模

Definition 4. *R 是一个有单位元的环, 集合 M 以及 M 上定义的两种运算, 加法 $(+)$ 和数乘 $(\cdot)$, 如果满足*

1. $(M, +)$ *是一个交换群*
2. $1v = v, (rs)v = r(sv), \quad \forall r, s \in R, v \in M$
3. $(r+s)u = ru + su, r(u+v) = ru + rv, \quad \forall r, s \in R, u, v \in M.$

则称 M 为一个 R 上的模, 简称 R 模.

上述定义和线性空间的定义仅仅区别在, 这里 R 只是一个单位环, 而非域, 所以, 模可以大致理解为" 环上的线性空间".

Remark. *当 R 是域时, M 即为线性空间; 环 R 自身就是一个 R 模.*

和线性空间类似, 同理可以引入例如子模, 生成集, 线性相关/无关, 基等概念. 但因为模只是定义在环上, 所以有一些和线性空间完全不同的情形.

没有基的模 环 Z_n 是一个整数环 Z 上的模, 任意 $v \in Z_n$, 都有 $nv = 0$. 所以 Z_n 中任意一个向量都是线性相关的, 所以也没有基.

Remark. *特殊的, 我们把有基的模称为自由模 (free module).*

自由模有不自由的子模 $Z \times Z$ 是 $Z \times Z$ 上的模, 基是 $(1,1)$. 张成整个 $Z \times Z$: $(n,m) = (n,m)(1,1)$; 线性无关性: $(n,m)(1,1) = (0,0) \Rightarrow (n,m) = (0,0)$. 但是子模 $Z \times \{0\}$ 没有基, 因为 $(0,1)(n,0) = (0,0)$.

自由模的基的元素个数可以任意 V 是数域 F 上的线性空间, 有可数多个元素的基 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$. $R = L(V)$ 是一个非交换环, R 自身是 R 上的一个模, 单位映射是 R 的一个基. 对于任意的正整数 n, 定义 β_s,

$$\beta_s(b_{kn+t}) = \begin{cases} b_k & \text{if } t = s \\ 0 & \text{if } t \neq s \end{cases}$$

可以验证 $C = \{\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}\}$ 张成 $L(V)$, 且线性无关, 即为 $L(V)$ 的 n 个元素的基.

Remark. *可以证明, 当 R 可交换时, 自由模 M 的任意两组基的元素个数相同, 这被称为自由模 M 的维数.*

3 主要结果

主理想整环上的有限生成模的分解定理如下

Theorem 1. *如果 R 是主理想整环, M 是一个有限生成的 R 模, 则 M 可以分解为有限多个循环模的直和, 也就是*

$$M \cong R^n \oplus R/\langle a_1 \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle a_d \rangle \tag{3.1}$$

其中 $n \geq 0$, 非零不可逆元 $a_1, a_2, \cdots, a_d \in R$ 满足 $a_1|a_2|\cdots|a_d$, 被称为不变因子. $\langle a \rangle$ 表示由 a 张成的理想.

4 定理证明

Definition 5. *假设 R 是一个交换环, M 是一个 R 模, 对于 M 中的元素 v, 如果存在 R 中元素 $r \neq 0$, 使得 $rv = 0$, 则称 v 是挠元 (torsion element). M_{tor} 是 M 中所有挠元构成的集合, 这是一个子模. 若 $M_{tor} = M$, 则称 M 为挠模; 若 $M_{tor} = \{0\}$, 称 M 为无挠模.*

Theorem 2. *M 是一个有限生成的主理想整环 R 上的模, 则 M 可以分解为*

$$M = M_{tor} \oplus M_{free} \tag{4.1}$$

Proof. 可以说明 M/M_{tor} 有限生成, 且无挠, 进而可以说明是自由的. □

由于 $M_{free} \cong R^n$, 其中 n 为 M_{free} 的维数, 所以 M_{free} 的结构比较清楚. 这里进一步地考虑对挠模 M_{tor} 的分解.

Definition 6. 对于任意的 $r \in M$, 定义 $ann(v) = \{r \in R \,|\, rv = 0\}$, 以及 $ann(M) = \{r \in R \,|\, rM = \{0\}\}$.

对于有限生成的挠模 M, $ann(M) \neq \{0\}$, 且 $ann(M)$ 是主理想整环 R 上的理想, 则可由单个元素张成, 这个生成元被称为 M 的阶 (order).

Theorem 3. M 是主理想整环 R 上的一个有限生成挠模, M 的阶 μ 可以质因子分解为

$$\mu = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$$

则 M 可以分解为

$$M = M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \cdots \oplus M_{p_n} \tag{4.2}$$

其中 $M_{p_i} = \{v \in M \,|\, p_i^{e_i} v = 0\}$.

Theorem 4. M 是主理想整环 R 上的一个有限生成挠模, M 的阶 $\mu = p^e$, 则 M 可以分解为

$$M = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_k \tag{4.3}$$

其中 C_i 为循环模, 阶为 p^{e_i}, 且 $e = e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_k$.

综合分解式(4.1), (4.2), (4.3), 则对于主理想整环 R 上的一个有限生成模 M, 其初等因子版本的循环分解为

$$M = M_{free} \oplus (C_{1,1} \oplus \cdots C_{1,k_1}) \oplus (C_{2,1} \oplus \cdots C_{2,k_2}) \oplus \cdots \oplus (C_{n,1} \oplus \cdots C_{n,k_n}) \tag{4.4}$$

其中 $C_{i,j}$ 是循环模, 阶为 $p_i^{e_{i,j}}$, 被称为初等因子. 记 $D_j = C_{1,j} \oplus \cdots \oplus C_{n,j}$, 则 D_j 是循环子模, 阶 $q_j = \prod_i p_i^{e_{ij}}$, M 不变因子版本的循环分解为

$$M = M_{free} \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_m \tag{4.5}$$

其中 D_j 是循环模, 阶为 $q_j = \prod_j p_j^{e_{ij}}$, 被称为不变因子. 注意到, 维数为 n 的 R 自由模 $M_{free} \cong R^n$, 而对于 $ann(M) = \langle a \rangle$ 的循环模 $D \cong R/\langle a \rangle$, 故有分解式(3.1)成立.

5 应用

对于有限维线性空间 V 上的线性变换 T, V 可以看作是多项式环 $F[x]$ 上的一个模, 其中数乘的定义为

$$p(x)v = p(T)v, \quad v \in V$$

不难验证, V 是主理想整环 $F[x]$ 上的有限生成挠模. 所以

$$V = (C_{1,1} \oplus \cdots C_{1,k_1}) \oplus (C_{2,1} \oplus \cdots C_{2,k_2}) \oplus \cdots \oplus (C_{n,1} \oplus \cdots C_{n,k_n})$$

假设 $ann(C_{1,1}) = \langle p_1^{e_{1,1}} \rangle$, $p_1^{e_{1,1}} = a_0 + a_1 x + \cdot + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$, 且 $D_1 = \langle v \rangle$. 则若选择 D_1 的一组基为

$$v, Tv, \cdots, T^{n-1}v,$$

则 T 在此组基下的矩阵为

$$T(v, Tv, \cdots, T^{n-1}v) = (v, Tv, \cdots, T^{n-1}v) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

在 $C_{1,2}, \cdots, C_{n,k_n}$ 中同样处理, 即得到线性映射 T 的有理标准形.

若 $p_i^{e_{i,j}} = (x - \lambda_i)^{e_{i,j}}$, 则选择则若选择 D_1 的一组基为

$$v,\ (T - \lambda_i I)v,\ \cdots,\ (T - \lambda I)^{e_{i,j}-1}v,$$

则 T 在此组基下的矩阵为

$$T(v, (T - \lambda_i I)v, \cdots, (T - \lambda I)^{e_{i,j}-1}v) = (v, (T - \lambda_i I)v, \cdots, (T - \lambda I)^{e_{i,j}-1}v) \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

在 $C_{1,2}, \cdots, C_{n,k_n}$ 中同样处理, 即得到线性映射 T 的 Jordan 标准形.