线性代数 A 答疑

Caiyou Yuan

July 1, 2021

命题 7.6.2(矩阵理论苏育才等) 设 n 阶方阵 A 的最小多项式为

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

则

$$g(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} m_i(\lambda) \left(a_{i0} + a_{i1}(\lambda - \lambda_i) + a_{i2}(\lambda - \lambda_i)^2 + \cdots a_{ik_i}(\lambda - \lambda_i)^{k_i - 1}\right)$$

满足如下 Hermite 插值条件

$$g^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad i = 1, \cdots, s, \; j = 0, \cdots, k_i - 1,$$

其中

$$m_i(\lambda) = m(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)^{k_i},$$

$$a_{ij} = \frac{1}{j!} \left(\frac{f(\lambda)}{m_i(\lambda)}\right)^{(j)} \Bigg|_{\lambda = \lambda_i}.$$

证明 只需验证插值条件即可. 注意到, 当 $j \leq k_i - 1$ 时,

$$g^{(j)}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_i} = \left[m_i(\lambda) \left(a_{i0} + a_{i1}(\lambda - \lambda_i) + a_{i2}(\lambda - \lambda_i)^2 + \cdots a_{ik_i}(\lambda - \lambda_i)^{k_i - 1}\right)\right]^{(j)} \Bigg|_{\lambda=\lambda_i}$$

只需验证上式等于 $f^{(j)}(\lambda_i)$ 即可.

对 j 进行数学归纳. 当 $j = 0$ 时，易见成立. 当 $j = 1$ 时,

$$\begin{aligned}
g^{(1)}(\lambda_i) &= m_i(\lambda_i)^{(1)} a_{i0} + m_i(\lambda_i) a_{i1} \\
&= \left(m_i(\lambda)^{(1)} \frac{f(\lambda)}{m_i(\lambda)} + m_i(\lambda) \left(\frac{f(\lambda)}{m_i(\lambda)}\right)^{(1)} \right) \Bigg|_{\lambda=\lambda_i} \\
&= f(\lambda_i)^{(1)}.
\end{aligned}$$

假设 $j < k$ 时成立, 其中 $k \leq k_i - 1$. 当 $j = k$ 时

$$\begin{aligned}
g^{(j)}(\lambda_i) &= \sum_{p=0}^{j} C_j^p m_i(\lambda_i)^{(p)} (j-p)! a_{i(j-p)} \\
&= \left(\sum_{p=0}^{j} C_j^p m_i(\lambda)^{(p)} \left(\frac{f(\lambda)}{m_i(\lambda)}\right)^{(j-p)} \right) \Bigg|_{\lambda=\lambda_i} \\
&= f(\lambda_i)^{(j)}.
\end{aligned}$$

证毕.

考试试题

1. 设 V_1 和 V_2 是数域 K 上的线性空间，维数分别为 m, n, 试通过 V_1 和 V_2 构造 K 上的线性空间 W_1 和 W_2, 使得他们的维数分别为 $m+n$ 和 mn.

2. 设 A 为实方阵，

   (1) 证明存在正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为分块上三角矩阵，且其主对角线上的块 A_{ii} 为 1 阶或 2 阶实方阵.

   (2) 设 A 的复特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 证明

   $$\operatorname{tr}(AA^T) \geq |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \cdots + |\lambda_m|^2,$$

   且等号成立当且仅当 $AA^T = A^TA$.

参考做法

1. $W_1 = V_1 \oplus V_2$(外直和), $W_2 = V_1 \otimes V_2$(张量积).

2. (1) 对维数归纳. 一阶或二阶显然成立, n 阶时如果有特征值, 则可以将特征向量扩充为标准正交基, 将问题归纳为 $n-1$ 阶. 如果没有特征值, 可以找到二维不变子空间，同样的方式，将问题归纳为 $n-2$ 阶.

   (2) 使用复 $Schur$ 分解

   $$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AA^T) &= \operatorname{tr}(AA^H)\\ &= \operatorname{tr}(URU^HUR^HU^H)\\ &= \operatorname{tr}(RR^H)\\ &= \sum_{i\leq j}|r_{ij}|^2\\ &\geq \sum_i |r_{ii}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2\end{aligned}$$

   等号成立当且仅当 $\sum_{i<j}|r_{ij}|^2 = 0$, 即 A 可酉对角化, 等价于 $AA^H = A^HA$, 即正规矩阵, 证毕.