线性代数 A(II) 习题课讲义 01

Caiyou Yuan

February 27, 2022

7.1

- 一元多项式的概念和运算
- 环的基本概念;关于加法构成交换群,乘法具有结合律,加法乘法具有左右分配律
- 一元多项式环 K[x] 的通用性质

例题

- 1. R 是有单位元 $1(\neq 0)$ 的环,若对于 $a \in R$, $\exists b \in R$, s.t. ab = ba = 1, 则称 b 为 a 的逆. 证明 a 的逆是唯一的,且 a 不为零因子.
- 2. 设 R 是一个环, 证明: $0a = a0 = 0, \forall a \in R; \forall a, b \in R, a(-b) = -ab$.
- 3. 设 B 是数域 K 上的 n 级幂零矩阵,幂零指数为 l , 令 A=aI+bB, 且 $a,b\neq 0.$ 说明 A 可逆,并计算 $A^{-1}.$
- 4. 设 $A \in M_n(C)$, 设

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s},$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 是两两不同的复数, $l_1+l_2+\dots+l_s=n$. 证明,对于 $k\in C, k\neq 0$,矩阵 kA 的特征多项式为

$$|\lambda I - kA| = (\lambda - k\lambda_1)^{l_1} (\lambda - k\lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - k\lambda_s)^{l_s},$$

 A^3 的特征多项式为

$$|\lambda I - A^3| = (\lambda - \lambda_1^3)^{l_1} (\lambda - \lambda_2^3)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s^3)^{l_s}.$$

7.2

- 整除关系
- 带余除法; 主要思路: 对被除式的次数用数学归纳法

例题

- 1. 设 $d, n \in N^*$, 则 K[x] 中, $x^d 1|x^n 1 \Longleftrightarrow d|n$.
- 2. 将 $f(x) = 5x^3 3x + 4$ 表示为 x + 2 的幂和/多项式.
- 3. 设 $m \in N^*, a \in K^*$, 证明: 在 K[x] 中, $x a|x^m a^m$, 并求商式.

多项式理论的应用: λ **-矩阵** 即矩阵的每个元素都是多项式环 $K[\lambda]$ 中元素;矩阵乘法,加法以及行列式等概念和数字矩阵类似

λ-矩阵的初等变换

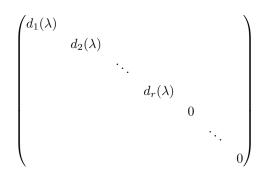
- (a) 矩阵的两行/列互换位置
- (b) 矩阵的某一行/列乘以非零常数 c
- (c) 矩阵的某一行/列加上另一行/列的 $p(\lambda)$ 倍, 其中 $p(\lambda) \in K[\lambda]$.

如果 $A(\lambda)$ 可以经过一系列行和列的初等变换化为 $B(\lambda)$, 则称 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 相抵.

例题

1. 证明: 设 $A(\lambda)$ 的左上角元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$, 并且 $A(\lambda)$ 中至少有一个元素不能被它除尽,那么一定可以找到 和 $A(\lambda)$ 相抵的 $B(\lambda)$, 它的左上角元素也不为零,但是次数小于 $a_{11}(\lambda)$ 的次数

2. 证明:任意一个非零的 $s \times n$ 的 λ-矩阵 A(λ) 都相抵于如下形式的矩阵 (被称为标准形式)



其中 $r \ge 1$, $d_i(\lambda)$ 是首一的多项式 (被称为不变因子), 且

$$d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda) \quad i = 1, 2, \dots, r-1.$$

3. 用初等变换化 λ-矩阵

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2\lambda - 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1 + \lambda^2 & \lambda^3 + \lambda - 1 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

为标准型.

 λ -矩阵标准形式的唯一性 下面来借助行列式因子的概念来说明 λ -矩阵标准形式的唯一性.

- 1. $(\lambda$ -矩阵的秩) 如果 $A(\lambda)$ 中有一个 $r \ge 1$ 级子式不为零,而所有的 r+1 级子式 (如果有的话) 全为零,则 称 $A(\lambda)$ 的秩为 r. 零矩阵的秩记为 0.
- 2. (λ -矩阵的行列式因子) 设 $A(\lambda)$ 的秩为 r, 对于 $1 \le k \le r$, $A(\lambda)$ 中全部 k 级子式的首一最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子.

例题

1. 等价的 λ-矩阵具有相同的秩和相同的各阶行列式因子.

2. 证明 λ-矩阵的不变因子和行列式因子有如下关系

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda), \quad d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \quad \dots, \quad d_r = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

3. 说明 λ -矩阵的标准形式是唯一的.