

线性代数 A(II) 习题课讲义 01

Caiyou Yuan

February 27, 2022

7.1

- 一元多项式的概念和运算
- 环的基本概念；关于加法构成交换群，乘法具有结合律，加法乘法具有左右分配律
- 一元多项式环 $K[x]$ 的通用性质

例题

1. R 是有单位元 $1(\neq 0)$ 的环，若对于 $a \in R, \exists b \in R, \text{s.t. } ab = ba = 1$, 则称 b 为 a 的逆. 证明 a 的逆是唯一的, 且 a 不为零因子.

2. 设 R 是一个环, 证明: $0a = a0 = 0, \forall a \in R; \forall a, b \in R, a(-b) = -ab$.

3. 设 B 是数域 K 上的 n 级幂零矩阵, 幂零指数为 l , 令 $A = aI + bB$, 且 $a, b \neq 0$. 说明 A 可逆, 并计算 A^{-1} .

4. 设 $A \in M_n(C)$, 设

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s},$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 是两两不同的复数, $l_1 + l_2 + \cdots + l_s = n$. 证明, 对于 $k \in C, k \neq 0$, 矩阵 kA 的特征多项式为

$$|\lambda I - kA| = (\lambda - k\lambda_1)^{l_1} (\lambda - k\lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - k\lambda_s)^{l_s},$$

A^3 的特征多项式为

$$|\lambda I - A^3| = (\lambda - \lambda_1^3)^{l_1} (\lambda - \lambda_2^3)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s^3)^{l_s}.$$

7.2

- 整除关系
- 带余除法; 主要思路: 对被除式的次数用数学归纳法

例题

1. 设 $d, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $K[x]$ 中, $x^d - 1 | x^n - 1 \iff d | n$.
2. 将 $f(x) = 5x^3 - 3x + 4$ 表示为 $x + 2$ 的幂和/多项式.
3. 设 $m \in \mathbb{N}^*, a \in K^*$, 证明: 在 $K[x]$ 中, $x - a | x^m - a^m$, 并求商式.

多项式理论的应用: λ -矩阵 即矩阵的每个元素都是多项式环 $K[\lambda]$ 中元素; 矩阵乘法, 加法以及行列式等概念和数字矩阵类似

λ -矩阵的初等变换

- (a) 矩阵的两行/列互换位置
- (b) 矩阵的某一行/列乘以非零常数 c
- (c) 矩阵的某一行/列加上另一行/列的 $p(\lambda)$ 倍, 其中 $p(\lambda) \in K[\lambda]$.

如果 $A(\lambda)$ 可以经过一系列行和列的初等变换化为 $B(\lambda)$, 则称 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 相抵.

例题

1. 证明: 设 $A(\lambda)$ 的左上角元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$, 并且 $A(\lambda)$ 中至少有一个元素不能被它除尽, 那么一定可以找到和 $A(\lambda)$ 相抵的 $B(\lambda)$, 它的左上角元素也不为零, 但是次数小于 $a_{11}(\lambda)$ 的次数

2. 证明 λ -矩阵的不变因子和行列式因子有如下关系

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda), \quad d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \quad \dots, \quad d_r = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

3. 说明 λ -矩阵的标准形式是唯一的.