线性代数 A(II) 习题课讲义 02

Caiyou Yuan

March 13, 2022

7.3

- 最大公因式: $K[x]$ 中任意两个多项式都有最大公因式，且可以表示为 f,g 的和式
- 互素

例题

1. $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+u$, $g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式为二次，求 t,u 的值

2. $f(x)=x^3-2x^2+2x-1, g(x)=x^4-x^3+2x^2-x+1$, 求 (f,g), 并表示为 f,g 的和式

3. 在 $K[x]$ 中, 如果 $(f(x),g(x))=1$, 并且 $\deg f>0, \deg g>0$, 那么在 $K[x]$ 中存在唯一的多项式 $u(x),v(x)$, $\deg u<\deg g, \deg v<\deg f$, s.t.
$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

4. 在 $K[x]$ 中，如果 $(f(x),g(x))=d(x)$, 那么在 $K[x]$ 中存在唯一的多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$, $\deg u<\deg g-\deg d$, $\deg v<\deg f-\deg d$, s.t.
$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x).$$

5. 在 $K[x]$ 中，$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 两两互素，证明对于任意的 $r_1(x), r_2(x), \cdots, r_s(x) \in K[x]$, 同余方程组
$$\begin{cases} g(x) \equiv r_1(x) \mod f_1(x) \\ g(x) \equiv r_2(x) \mod f_2(x) \\ \quad \vdots \\ g(x) \equiv r_s(x) \mod f_s(x) \end{cases}$$
在 $K[x]$ 中有解，且若 $c(x), d(x)$ 均为解，则 $c(x) \equiv d(x), \mod f_1 f_2 \cdots f_s$.

7.4

- 不可约多项式
- 唯一因式分解定理；这里唯一性的意义是?

例题

1. 证明，数域 K 上的一个次数大于零的多项式 f 与 $K[x]$ 中某一不可约多项式的正整数次幂相伴的充分必要条件是，对于任意 $g(x) \in K[x]$, 必有 $(f(x), g(x)) = 1$, 或者存在一个整数数 m, 使得 $f(x)|g^m(x)$.

7.5 等

- 重因式
- 复数域上的不可约多项式只有一次的
- 实数域上的不可约多项式都是一次的，或判别式小于零的二次多项式
- 有理数域上的不可约多项式可以是任意次数的

例题

1. 证明, $K[x]$ 中一个 n 次 $(n \geq 1)$ 多项式 $f(x)$, 能被它的导数整除的充分必要条件是 $f(x)$ 与一个一次因式的 n 次幂相伴.

2. 设 K 是一个数域，R 是 K 的一个交换扩环，设 $a \in R$, 其中 $J_a \neq 0$,
$$J_a = \{f(x) \in K[x] | f(a) = 0\}$$
证明:

(1) J_a 中存在唯一的首项系数为 1 的多项式 $m(x)$, 使得 J_a 的元素都是 $m(x)$ 的倍式.

(2) 如果 R 是无零因子环，则 $m(x)$ 在 $K[x]$ 中不可约.

(3) 取 $K = C, R = C[A]$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求 J_A 中的 $m(x)$, 并判断 $C[A]$ 是无零因子环么?

3. 在复数域上求下述循环矩阵的全部特征值以及行列式

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$