线性代数 A(II) 习题课讲义 07

Caiyou Yuan

May 23, 2022

---

1 具有度量的线性空间

1.1 双线性函数

- 双线性函数, 及其在基下的度量矩阵: 不同基下的度量矩阵是合同的, 以及合同的矩阵可以看作是同一双线性函数在不同基下的度量矩阵;
- 对称/反对称的双线性函数/矩阵, 及其标准形式
  1. 特征不为 2 的域上, 对称矩阵可以合同于对角矩阵
  2. 特征不为 2 的域上, 反对称矩阵合同于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

  3. 特征为 2 的域 F 上, 因为 $\forall a \in F, -a = a$, 所以对称矩阵和反对称矩阵相同.
     * 若 $\exists \alpha \in F^n$, 使得 $\alpha^T A \alpha \neq 0$, 则 A 可以合同于一个对角矩阵;
     * 若 $\forall \alpha \in F^n$, 使得 $\alpha^T A \alpha = 0$, 则 A 可以合同于矩阵1.1.

1.2 对称双线性函数和二次型的关系

设 V 是域 F 上的线性空间, 映射 $q : V \to F$ 定义为 V 上的二次函数, 如果存在 V 上的对称双线性函数 f, 使得 $\forall \alpha \in V, q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$. 若 $\operatorname{char} F \neq 2$, 则二次函数和对称双线性函数一一对应, 因为注意到,

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta)].$$

1.3 双线性函数空间

V 上的所有双线性函数, 关于函数的加法和数乘, 构成域 F 上的线性空间, 记为 $T_2(V)$. 易见 $T_2(V) \cong M_n(F) \cong Hom(V, V)$.

例题 取 V^* 中的对偶基为 $\{f_i\}_{i=1}^n$, 证明 $f_i \otimes f_j$ 是 $T_2(V)$ 的一组基, 其中 $(f \otimes g) \in T_2(V)$, 定义为 $(f \otimes g)(\alpha, \beta) = f(\alpha)g(\beta)$.

1.4 例题

设 f 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数,

1. (a) 映射 $L_f : \alpha \to \alpha_L$ 是 V 到 V^* 的线性映射;

   (b) f 是非退化的当且仅当 L_f 是线性空间 V 到 V^* 的一个同构映射.

2. 若 f 非退化

   (a) 任给 V 上的一个双线性函数 g，存在 V 上唯一的一个线性变换 G, 使得

   $$g(\alpha, \beta) = f(G\alpha, \beta), \forall \alpha, \beta \in V$$

   (b) 令 $\sigma : g \to G$, 则 σ 是 $T_2(V)$ 到 $Hom(V, V)$ 的一个同构映射.

   (c) 设域 F 的特征不为 2，且 f, g 对称，证明 V 中存在一个基使得 f, g 在此基下的度量矩阵都是对角矩阵的充分必要条件是 G 可以对角化.

   (d) 设 A, B 都是特征不为 2 的域 F 上的 n 级对称矩阵，且 A 是可逆的，证明 A, B 可以同时合同对角化的充分必要条件是 $A^{-1}B$ 可以对角化.

2 实内积空间

实线性空间 + 正定的对称双线性函数 = 实内积空间，有限维的实内积空间即欧氏空间.

2.1 实内积空间的度量

定义 $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$，有柯西不等式

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|, \forall \alpha, \beta.$$

定义 $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$, 证明 d 是一个距离，即满足对称性，正定性和三角不等式.

2.2 实内积空间的同构

同构映射 σ, 不仅作为线性空间的同构映射，还要求保持内积, 即 $(\sigma\alpha, \sigma\beta) = (\alpha, \beta)$. 两个欧氏空间同构的充要条件是维数相同.

2.3 例题

在 $R[x]_{n+1}$ 中定义内积

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

令

$$P_0(x) = 1, P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k}((x^2-1)^k), k = 1, 2, \cdots, n.$$

证明, 这是 $R[x]_{n+1}$ 的一个正交基.

3 正交变换

实内积空间 V 到自身的满射 A, 满足

$$(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta), \forall \alpha, \beta$$

则称 A 是 V 上的正交变换. 可以证明

1. A 是线性的;
2. A 是单的, 从而 A 是可逆的.
3. A 是 V 到自身的一个同构映射.

3.1 例题

1. 证明，实内积空间 V 到自身的满射 A 是正交变换当且仅当 A 是保持向量长度不变的线性变换。

2. 设 V 是 n 维欧氏空间，η 是 V 中一单位向量，设 P 是 V 在 $<\eta>$ 上的正交投影，令 $A = I - 2P$, 称 A 为关于 $<\eta>^{\perp}$ 的镜面反射. 证明这是第二类正交变换.

3. (a) 设 A 是 2 维欧氏空间 V 上的第二类正交变化, 证明 A 是关于某一条直线的镜面反射
   (b) 设 A 是 2 维欧氏空间 V 上的第一类正交变换, 证明 A 能表示为两个镜面反射的乘积
   (c) 证明 n 维欧氏空间 V 上的任一正交变换都可以表示成至多 n 个镜面反射的乘积

3. 设 A 是 n 维欧氏空间 V 上的一个线性变换，证明 A 是镜面反射当且仅当 A 在 V 的任意一个标准正交基下的矩阵形如 $I - 2\alpha\alpha^T$，其中 α 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一单位向量.

4. (正交变换的矩阵表示) A 是实内积空间 V 上的正交变换.
   (a) 假设 A 有特征值，证明特征值为 1 或-1.

   (b) 证明 A 属于不同特征值的特征向量互相正交.

   (c) 若 W 是 A 的一个有限维不变子空间，则 $W^{\perp}$ 也是 A 的不变子空间.

   (d) 若 $\dim V = 2$, 若 A 是第一类的，那么 V 中存在一组正交基，使得 A 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, 0 \leq \theta \leq \pi,$$

   如果 A 是第二类的，那么存在一组正交基，A 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(e) 若 $\dim V<\infty$, 证明 V 中存在一个标准正交基，使得此基下 A 的矩阵为分块对角：

$$\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\theta_m & -\sin\theta_m\\ \sin\theta_m & \cos\theta_m\end{pmatrix}\right\}$$

其中 $\lambda_i=1$ 或 -1, $0<\theta_i<\pi$.

4 复内积空间

- Hermite 性
- 酉变换, Hermite 变换
- 伴随变换，正规变换

4.1 例题

1. 设 A 是复/实内积空间 V 上的线性变换，如果存在 V 上的线性变换，记做 A^*, 满足

$$(A\alpha,\beta)=(\alpha,A^*\beta),\forall\alpha,\beta\in V,$$

则称 A^* 是 A 的伴随变换. 证明对于有线维的复/实内积空间, 伴随变换是存在唯一的.

2. (a) (Schur 引理) 设 A 是 n 阶复方阵，则 A 可酉上三角化，即存在酉矩阵 U, 使得 UAU^* 为上三角矩阵.

(b) (酉对角化的充分必要条件) 设 A 是 n 阶复方阵, A 可以酉对角化的充分必要条件是 $AA^*=A^*A$.