北京大学数学科学学院期中试题

2021-2022 学年第二学期

考试科目：线性代数 A　　　　考试时间：2022 年 4 月 18 日上午

姓　名:________________　　学　号: ________________

本试题共 8 道大题，满分 100 分

1. (14 分) 已知有理数域 $\mathbb{Q}$ 上多项式

$$f(x) = 3x^2 - 2x^2 + x + 2, \quad g(x) = x^2 - x + 1,$$

求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x), g(x))$, 以及 $u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)).$$

2. (10 分) 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, V_1, V_2 和 V_3 都是 V 的 $n-1$ 维子空间, 则是否一定有

$$(V_1 + V_2) \cap V_3 = (V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3)?$$

试证明或给出反例.

3. (10 分) 设 V 和 W 都是数域 F 上的线性空间, $\mathbf{A}$ 是从 V 到 W 的线性映射, 其在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 W 的基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 下的矩阵为 A. 则当 A 满足什么条件时映射 $\mathbf{A}$ 是单射? 并证明你的结论.

4. (12 分) 设 $\mathbf{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换, 其在 V 的某个基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

试判断是否可能存在 V 的一个基使得 $\mathbf{A}$ 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

若存在, 请给出这个基; 若不存在, 请说明理由.

5. (12 分) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 都是复线性空间 V 上的线性变换. 已知 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 没有公共非平凡不变子空间, 并且 $\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 均可交换. 求 $\mathbf{C}$ 的所有特征子空间.

6. (18 分) 设 V 为 n 维线性空间, $\mathbf{T}$ 为 V 上秩为 r 的线性变换且 k 为满足 $\mathbf{T}^k = 0$ 的最小正整数.

   (1) 对于 $1 < l \leq k$, 证明 $\dim \mathrm{Im}\mathbf{T}^l < \dim \mathrm{Im}\mathbf{T}^{l-1}$;

   (2) 若 $k = 2$, 证明 $\mathrm{Im}\mathbf{T} \subset \ker \mathbf{T}$ 并计算商空间 $\ker \mathbf{T}/\mathrm{Im}\mathbf{T}$ 的维数.

7. (16 分) 设 A 为 n 阶复矩阵, 且具有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 设 $M_n(\mathbb{C})$ 为所有 n 阶复矩阵构成的线性空间. 定义 $M_n(\mathbb{C})$ 上线性变换 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A}(B) := ABA^T, \quad \forall B \in M_n(\mathbb{C}),$$

   其中 A^T 为 A 的转置.

   (1) 设 $X, Y \in \mathbb{C}^n$ 分别为属于 A 的特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 利用 X, Y 构造出 $\mathbf{A}$ 的一个特征向量;

   (2) 求 $\mathbf{A}$ 的一个非平凡零化多项式.

8. (8 分) 设 $M_n(K)$ 为数域 K 上所有 n 阶矩阵构成的线性空间, W 是 $M_n(K)$ 的一个子空间, 且对任意 $A \in M_n(K)$ 和任意 $B \in W$ 有 $AB \in W$. 设 W 中矩阵秩的最大值为 r, 证明 $\dim W = nr$.