线性代数 A(II) 习题课讲义 01

Caiyou Yuan

February 27, 2022

7.1

- 一元多项式的概念和运算
- 环的基本概念；关于加法构成交换群，乘法具有结合律，加法乘法具有左右分配律
- 一元多项式环 $K[x]$ 的通用性质

例题

1. R 是有单位元 $1(\neq 0)$ 的环，若对于 $a \in R, \exists b \in R$, s.t. $ab = ba = 1$, 则称 b 为 a 的逆. 证明 a 的逆是唯一的, 且 a 不为零因子.

   $b_1 = b_1 1 = b_1 a b_2 = 1 b_2 = b_2$

   若 a 为零因子, $ab=0$, $a^{-1}ab=0 \Rightarrow b=0$ 矛盾

2. 设 R 是一个环，证明: $0a = a0 = 0, \forall a \in R; \forall a, b \in R, a(-b) = -ab$.

3. 设 B 是数域 K 上的 n 级幂零矩阵，幂零指数为 l，令 $A = aI + bB$, 且 $a, b \neq 0$. 说明 A 可逆，并计算 A^{-1}.

4. 设 $A \in M_n(C)$, 设

   $$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s},$$

   其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是两两不同的复数，$l_1 + l_2 + \cdots + l_s = n$. 证明，对于 $k \in C$, $k \neq 0$, 矩阵 kA 的特征多项式为

   $$|\lambda I - kA| = (\lambda - k\lambda_1)^{l_1}(\lambda - k\lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - k\lambda_s)^{l_s},$$

   A^3 的特征多项式为

   $$|\lambda I - A^3| = (\lambda - \lambda_1^3)^{l_1}(\lambda - \lambda_2^3)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s^3)^{l_s}.$$

   对于多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, 也成立

   $$|\lambda I - f(A)| = (\lambda - f(\lambda_1))^{l_1} \cdots (\lambda - f(\lambda_s))^{l_s}$$

7.2

- 整除关系
- 带余除法; 主要思路: 对被除式的次数用数学归纳法

例题

1. 设 $d, n \in N^*$, 则 $K[x]$ 中, $x^d - 1 | x^n - 1 \Longleftrightarrow d|n$.

2. 将 $f(x) = 5x^3 - 3x + 4$ 表示为 $x + 2$ 的幂和/多项式.

3. 设 $m \in N^*, a \in K^*$, 证明: 在 $K[x]$ 中, $x - a | x^m - a^m$, 并求商式.

多项式理论的应用: λ-矩阵　即矩阵的每个元素都是多项式环 $K[\lambda]$ 中元素；矩阵乘法，加法以及行列式等概念和数字矩阵类似

λ-矩阵的初等变换

(a) 矩阵的两行/列互换位置

(b) 矩阵的某一行/列乘以非零常数 c

(c) 矩阵的某一行/列加上另一行/列的 $p(\lambda)$ 倍，其中 $p(\lambda) \in K[\lambda]$.

如果 $A(\lambda)$ 可以经过一系列行和列的初等变换化为 $B(\lambda)$, 则称 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 相抵.

例题

1. 证明: 设 $A(\lambda)$ 的左上角元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$, 并且 $A(\lambda)$ 中至少有一个元素不能被它除尽，那么一定可以找到和 $A(\lambda)$ 相抵的 $B(\lambda)$, 它的左上角元素也不为零，但是次数小于 $a_{11}(\lambda)$ 的次数

$a_{ij}(\lambda)$.

$a_{ij}(\lambda) = a_{11}(\lambda) b_1(\lambda) + r_1(\lambda)$

① 若 $i=1$, 或 $j=1$, 相应将第一列/行乘上 $(-b_1(\lambda))$ 加到第 j 列/i 行
再列或行交换

② 若 $i \neq 1$ 且 $j \neq 1$, a_{1j}, a_{i1} 均为 a_{11} 倍式

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}} - 1\right) a_{1j} \end{matrix}$$

交换行, 化为 ①

2. 证明：任意一个非零的 $s \times n$ 的 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 都相抵于如下形式的矩阵 (被称为标准形式)

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $r \geq 1$, $d_i(\lambda)$ 是首一的多项式 (被称为不变因子), 且

$$d_i(\lambda) \,|\, d_{i+1}(\lambda) \quad i = 1, 2, \cdots, r-1.$$

$a_{11} \neq 0$，若干有穷次操作 ($\leq \deg a_{11}(\lambda)$)，其它位置均为 a_{11} 倍式

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \rightarrow \text{子阵相同操作}$$

3. 用初等变换化 λ-矩阵

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2\lambda - 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^3 + \lambda - 1 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

为标准型.

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda^2+1 \end{bmatrix}$$

λ-矩阵标准形式的唯一性 下面来借助行列式因子的概念来说明 λ-矩阵标准形式的唯一性.

1. (λ-矩阵的秩) 如果 $A(\lambda)$ 中有一个 $r \geq 1$ 级子式不为零，而所有的 $r+1$ 级子式 (如果有的话) 全为零, 则称 $A(\lambda)$ 的秩为 r. 零矩阵的秩记为 0.

2. (λ-矩阵的行列式因子) 设 $A(\lambda)$ 的秩为 r，对于 $1 \leq k \leq r$, $A(\lambda)$ 中全部 k 级子式的首一最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子.

例题

1. 等价的 λ-矩阵具有相同的秩和相同的各阶行列式因子.

初等变换不改变秩，以及行列式因子.

行交换 $\Rightarrow$ 子式行列式 $\times(-1)$

行 $\times c$ $\Rightarrow$ ...... $\times c$ $\Rightarrow$ 不改变子式是否为0

行 $\times p(x)$ 加上 $\Rightarrow$ ...... 不变 以及最大公因式

2. 证明 λ-矩阵的不变因子和行列式因子有如下关系

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda), \quad d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \quad \ldots, \quad d_r = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

$D_1 = d_1$

$D_2 = d_1 d_2$

$\vdots$

$D_r = d_1 d_2 \cdots d_r$

3. 说明 λ-矩阵的标准形式是唯一的.

行列式因子不变 $\Rightarrow$ 不变因子不变

秩不变

$\Downarrow$

标准型唯一