线性代数 A(II) 习题课讲义 02

Caiyou Yuan

March 13, 2022

7.3

- 最大公因式: $K[x]$ 中任意两个多项式都有最大公因式，且可以表示为 f, g 的和式
- 互素

例题

1. $f(x) = x^3 + (1+t)x^2 + 2x + u$, $g(x) = x^3 + tx + u$ 的最大公因式为二次，求 t, u 的值

   $f(x) = g(x) + \underbrace{(1+t)x^2 + (2-t)x}$ 余项最多二次

   $\Rightarrow 1+t \neq 0$, 且 $g(x)$ 整除 $x^2 + \frac{2-t}{1+t}x$

   $x^2 + \frac{2-t}{1+t}x \,\big)\, x^3 + 0x^2 + tx + u$ 商 $x - \frac{2-t}{1+t}$

   $x^3 + \frac{2-t}{1+t}x^2$

   $-\frac{2-t}{1+t}x^2 + tx$

   $-\frac{2-t}{1+t}x^2 - \left(\frac{2-t}{1+t}\right)^2 x$

   $\Rightarrow \left[t + \left(\frac{2-t}{1+t}\right)^2\right]x + u$

   余项为0, $u = 0$

   $t + \left(\frac{2-t}{1+t}\right)^2 = 0$

   $(2-t)^2 = -t(1+t)^2$

   $t^2 - 4t + 4 = -t(t^2 + 2t + 1)$

   $t^3 + 3t^2 - 3t + 4 = 0$

   $(t+4)(t^2 - t + 1) = 0 \Rightarrow t = -4$

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1, g(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$, 求 (f, g), 并表示为 f, g 的和式

   $(f, g) = x^2 - x + 1$

   $-\frac{1}{2}(x+1)f(x) + \frac{1}{2}g(x) = (f, g)$

3. 在 $K[x]$ 中, 如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 并且 $\deg f > 0, \deg g > 0$, 那么在 $K[x]$ 中存在唯一的多项式 $u(x), v(x)$, $\deg u < \deg g, \deg v < \deg f$, s.t.

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

   已知存在 $u_1, v_1 \in K[x]$, $u_1 f + v_1 g = 1$

   带余除法 $u_1 = g u_2 + u_3$

   $\Rightarrow u_3 f + \underbrace{(u_2 f + v_1)}_{\text{说明次数小于}\deg f\text{即可(反证)}} g = 1$

   唯一性:

   若 $u_1 f + v_1 g = 1$

   $u_2 f + v_2 g = 1$

   $(u_1 - u_2) f = -(v_1 - v_2) g$

   $\Rightarrow f \mid -(v_1 - v_2) g$, 又 $(f, g) = 1$

   $\Rightarrow f \mid (v_2 - v_1)$

   $\Rightarrow v_2 - v_1 = 0$

4. 在 $K[x]$ 中，如果 $(f(x), g(x)) = d(x)$, 那么在 $K[x]$ 中存在唯一的多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$, $\deg u < \deg g - \deg d$, $\deg v < \deg f - \deg d$, s.t.

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x).$$

   考虑: $u(x)\frac{f(x)}{d(x)} + v(x)\frac{g(x)}{d(x)} = 1$

5. 在 $K[x]$ 中，$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 两两互素，证明对于任意的 $r_1(x), r_2(x), \cdots, r_s(x) \in K[x]$, 同余方程组

$$\begin{cases} g(x) \equiv r_1(x) \mod f_1(x) \\ g(x) \equiv r_2(x) \mod f_2(x) \\ \quad \vdots \\ g(x) \equiv r_s(x) \mod f_s(x) \end{cases}$$

在 $K[x]$ 中有解，且若 $c(x), d(x)$ 均为解，则 $c(x) \equiv d(x)$, $\mod f_1 f_2 \cdots f_s$.

考虑 $c-d\equiv 0$, mod f_i

$\begin{cases} g\equiv r_1 \mod f_1 \\ g\equiv r_2 \mod f_2 \end{cases}$ 考虑 $\begin{cases} g_1\equiv 1 \mod f_1 \\ g_1\equiv 0 \mod f_2 \end{cases}$, $\begin{cases} g_2\equiv 0 \mod f_1 \\ g_2\equiv 1 \mod f_2 \end{cases}$

$r_1g_1+r_2g_2$ 即为原问题的一个解

7.4

- 不可约多项式
- 唯一因式分解定理；这里唯一性的意义是?

任 s，考虑 g_i, $i=1,\cdots,s$

$g_i\equiv\delta_{ij} \mod f_j$, $j=1,\cdots,s$, $\sum r_ig_i$ 即为解.

例题

1. 证明，数域 K 上的一个次数大于零的多项式 f 与 $K[x]$ 中某一不可约多项式的正整数次幂相伴的充分必要条件是，对于任意 $g(x) \in K[x]$, 必有 $(f(x), g(x)) = 1$, 或者存在一个整数数 m, 使得 $f(x)|g^m(x)$.

$f\sim p^m$，必要性：考虑 $p|g$ 或 $p\nmid g$

充分性. 取 f 的不可约因子 p_1

$(f, p_1)\neq 1$, $\Rightarrow f|p_1^m$

$\begin{cases} g_i\equiv 1 \mod f_i \\ g_i\equiv 0 \mod f_1\cdots f_s \end{cases}$

7.5 等

- 重因式
- 复数域上的不可约多项式只有一次的
- 实数域上的不可约多项式都是一次的，或判别式小于零的二次多项式
- 有理数域上的不可约多项式可以是任意次数的

例题

1. 证明, $K[x]$ 中一个 n 次 $(n \geq 1)$ 多项式 $f(x)$, 能被它的导数整除的充分必要条件是 $f(x)$ 与一个一次因式的 n 次幂相伴.

充分性显然

必要性：(f, f') 是 f 的所有不可约因式的乘积(只出现一次)

$(f,f')=f' \Rightarrow f=(ax+b)f'$.

$f=ap_1^{l_1}\cdots p_s^{l_s}$

$f'=p_1^{l_1-1}\cdots p_s^{l_s-1}h(x)$ $\equiv c$

$f'|f$

$\Rightarrow f=f'p_1p_2\cdots p_s$

$\Rightarrow ax+b$ 是 f 唯一的不可约因子.

2. 设 K 是一个数域，R 是 K 的一个交换扩环，设 $a \in R$, 其中 $J_a \neq 0$,

$$J_a = \{f(x) \in K[x] | f(a) = 0\}$$

证明:

必要性方法二，对 n 数学归纳

$n=1$ 成立

假设 $n=k-1$ 成立, $n=k$ 时, $k>1$

$f=(ax+b)f'$

$f' = af' + (ax+b)f''$

$f' = \frac{1}{1-a}(ax+b)f''$

归纳：$\Rightarrow f'$ 为 $c(ax+b)^{k-1} \Rightarrow f = c(ax+b)^k$

(1) J_a 中存在唯一的首项系数为 1 的多项式 $m(x)$, 使得 J_a 的元素都是 $m(x)$ 的倍式.

取次数最小的多项式为 $\tilde{m}(x)$

$\forall f \in J_a$, $f(x) = \tilde{m}(x)p(x) + r(x)$ $\deg r < \deg \tilde{m}$

$\Rightarrow r(a) = f(a) - \tilde{m}(a)p(a) = 0$. $r(x) \in J_a$ 矛盾.

唯一性，m_1, m_2 次数相同. 首一

$m_1 | m_2$, $m_2 | m_1$

$\Rightarrow m_1 = m_2$

(2) 如果 R 是无零因子环，则 $m(x)$ 在 $K[x]$ 中不可约.

若 m 可约，$m = pq$

$0 = m(a) = p(a)q(a)$, $p(a), q(a) \neq 0$

因为 $\deg p < \deg m$

$\deg q < \deg m$

(3) 取 $K = C, R = C[A]$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求 J_A 中的 $m(x)$, 并判断 $C[A]$ 是无零因子环么?

$m(x)$ 为 A 的最小多项式

特征多项式 $f(x) \in J_A$

$\Rightarrow m(x) | f(x)$

A 的特征多项式, $|xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 + 1$

易见 $\deg m > 1$, $\Rightarrow m(x) = (x-1)^2 + 1$, 在 $C[x]$ 中可约.

$C[A]$ 有零因子.

3. 在复数域上求下述循环矩阵的全部特征值以及行列式

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$, $A = a_1 I + a_2 C + \cdots + a_n C^{n-1}$

$= f(C)$, $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots a_n x^{n-1}$

C 的特征多项式 $x^n - 1$, 特征值为 $e^{2\pi \frac{k}{n} i}$. 记为 ξ^k, $k = 0, \cdots, n-1$.

则 A 的特征值为 $f(\xi^k)$, $k = 0, \cdots, n-1$.

解释：$|\lambda I - f(C)|$ $(-1)^n |C - z_1 I||C - z_2 I| \cdots |C - z_n I|$

$= \cancel{(-1)^{n+n^2}} |z_1 I - C| \cdots |z_n I - C|$ $(-1)^{(n+1)ls}$

$\Downarrow$

考虑多项式 $\lambda - f(x) = -(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$ $(-1)^{(n+1)l_1}$ $(\lambda - f(\lambda_1))^{l_1} \cdots (\lambda - f(\lambda_s))^{l_s}$

已知 $g(\lambda) = |\lambda I - C| = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$

$\Rightarrow |\lambda I - f(C)| = (-1)^{n+n^2} |z_1 I - C| \cdots |z_n - C| = \cancel{(-1)^{n+n^2}}$ $\boxed{\begin{matrix} (z_1 - \lambda_1)^{l_1} \\ (z_2 - \lambda_1)^{l_1} \\ \vdots \\ (z_n - \lambda_1)^{l_1} \end{matrix}} \cdots \boxed{\begin{matrix} (z_1 - \lambda_s)^{l_s} \\ (z_2 - \lambda_s)^{l_s} \\ \vdots \\ (z_n - \lambda_s)^{l_s} \end{matrix}}$

$= (\lambda - f(\lambda_1))^{l_1} \cdots (\lambda - f(\lambda_s))^{l_s}$