线性代数 A(II) 习题课讲义 03

Caiyou Yuan

March 27, 2022

8.1

定理，线性空间 E，S 张成 E，R 线性无关，且 $R \subseteq S$
则存在 E 的基 T，$R \subseteq T \subseteq S$.

证明：$A(R,S)$ 由 E 所有满足下述条件的子集构成.
(1) $R \subseteq X \subseteq S$
(2) X 线性无关.
由集合的包含关系构成偏序集.
每一条链都有极大元 $\Rightarrow A(R,S)$ 有极大元 (Zorn's lemma)
选择公理
链 $\{X_\alpha\}$，$X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ 满足 (1)
(全序的子集)
X 线性无关：选择 $\sum_{i=1}^{n} k_i y_i = 0$，由于 $\{X_\alpha\}$ 是一条链
可取某个 X_{α_0}，$y_i \in X_{\alpha_0}$，由 X_{α_0} 的线性无关性，$k_i = 0$，$i = 1, \cdots, n$
$A(R,S)$ 极大元 T 就是 E 的基.
T 线性无关，若 T 不张成 E，则 $\exists \beta \in S$，$\beta \notin \langle T \rangle$
$T \cup \{\beta\} \in A(R,S)$
这与 T 是极大元矛盾.

- 域, 以及域 F 上的线性空间
- 基和维数
  a. 所有非零线性空间均有基 左边定理取 $S = E$，R 为某个非零向量
  b. 线性空间中的任意一组线性无关的向量可以扩充为基
  有限维，可取一组基，不断尝试加入.
  无穷维？
- 过渡矩阵

例题

1. (a) 把域 F 看成是 F 上的线性空间，求它的一个基和维数；$\{1\}$，1

   (b) 把复数域 C 看成是实数域 R 上的线性空间，求它的一个基和维数；$\{1, i\}$，2

   (c) 把实数域 R 看成是有理数域 Q 上的线性空间，证明: 对于任意大于 1 的正整数 n

   $$1, \sqrt[n]{3}, \sqrt[n]{3^2}, \cdots, \sqrt[n]{3^{n-1}}$$

   $k_1 1 + k_2 \sqrt[n]{3} + \cdots + k_n \sqrt[n]{3^{n-1}} = 0$，$k_i \in Q$
   $\Rightarrow k_i = 0$

   是线性无关的. (提示: 已知 $g(x) = x^n - 3$ 是 Q 上的不可约多项式) 假设 k_i 不全为 0.
   $f(x) = k_1 + k_2 x + \cdots + k_n x^{n-1} \in Q[x]$
   $f(\sqrt[n]{3}) = 0$
   在 $R[x]$ 中，$(x - \sqrt[n]{3}) \mid f(x)$，$(x - \sqrt[n]{3}) \mid g(x)$ 不互质
   $\Rightarrow$ $Q[x]$ 中也不互质.
   $\Rightarrow g(x) \mid f(x)$
   $\Rightarrow$ 与次数矛盾

   (d) 证明: 实数域 R 作为有理数域 Q 上的线性空间是无穷维的.
   由 (c) 可知.

2. 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，域 F 包含域 E, F 可看作域 E 上的 m 维线性空间

   (a) 求证：V 可以成为域 E 上的线性空间

   (b) 证明: 求 V 作为域 E 上线性空间的维数
   V 做为 F 上的 n 维线性空间，基为 $\{v_1, \cdots, v_n\}$
   F 做为 E 上的 m 维线性空间，基为 $\{f_1, \cdots, f_m\}$
   $\{v_i f_j\}$ 为 V 作为 E 上线性空间的基 $\begin{cases} \text{线性无关性：先后利用 } \{v\}, \{f\} \text{ 的线性无关性.} \\ \text{张成 } V\text{：先后利用 } \{v\}, \{f\} \text{ 张成 } V \text{ 和 } F. \end{cases}$

3. (Complexification of real vector space) 设 V 是数域 R 上的 n 维线性空间，设 $V_C = \{(u, v), u, v \in V\}$, 定义 V_C 上的加法

   $$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$$

   以及 C 上的数乘

   $$(a + bi)(u, v) = (au - bv, av + bu)$$

(a) 求证：V_C 是一个复线性空间

(b) 计算 V_C 的维数

V_C做为R线性空间$2n$维 基为 $\left\{\begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_i \end{pmatrix}, i=1,\cdots n\right\}$

利用2中结论，C线性空间n维.

基$\left\{\begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$，$i\begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_i \end{pmatrix}$

4. (对偶空间) 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间，考虑复数域 C 上的线性空间 C^V(从 V 到 R 的函数全体) 中具有下述性质的函数组成的子集 W:

$$f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V,$$

$$f(k\alpha) = kf(\alpha), \quad \forall \alpha \in V, k \in K.$$

(a) 求证：W 是一个复线性空间

(b) 求 W 的一个基和维数；设 $f \in W$, 求 f 在这个基下的坐标

取V的基$\{v_i\}_{i=1}^n$

$f_i(v_j)=\delta_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots,n$

$\{f_i\}$是W的一组基(对偶基)

5. (零化多项式和最小多项式) 设 A 是数域 K 上的一个非零 n 阶矩阵，说明 $K[A]$ 是 K 上的一个线性空间. $K[A]$ 至多多少维? [1]

$K[A] \subseteq M_n(K)$，至多n^2维.

实际上维数为A的最小多项式次数.

6. 设递推方程

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

其中 a, b 都是非零复数. 若 N 上的一个复值数列 u_n 满足上述递推关系，则称为上述递推方程的解. 一元多项式 $f(x) = x^2 - ax - b$ 称为上述递推方程的特征多项式. 求证

(a) 上述递推方程的解集 W 是一个复线性空间

(b) 设 α 是一个非零复数，则 $\alpha^n \in W$ 当且仅当 $f(\alpha) = 0$

$\alpha^n = a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2} \Leftrightarrow \alpha^2 = a\alpha + b \Leftrightarrow f(\alpha)=0$

(c) 设 α 是一个非零复数，则 $n\alpha^n \in W$ 当且仅当 $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$.

$n\alpha^n = a(n-1)\alpha^{n-1} + b(n-2)\alpha^{n-2}$ $\forall n \geq 2$

$\Leftrightarrow n\alpha^2 = a(n-1)\alpha + b(n-2)$

$= n(a\alpha+b) - (a\alpha+2b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = a\alpha+b \\ a\alpha+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = a\alpha+b \\ b=-\frac{a\alpha}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2\alpha \\ b=-\alpha^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=2\alpha-a=0 \end{cases}$

(d) 若 $f(x)$ 有两不同的根 α_1, α_2, 则任意 $u_n \in W$, 可以表示为

$$u_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n$$

其中 C_1, C_2 是常数;

(e) 若 $f(x)$ 有二重根 α, 则任意 $u_n \in W$, 可以表示为

$$u_n = C_1\alpha^n + C_2 n\alpha^n$$

其中 C_1, C_2 是常数;

(d) 说明 α_1^n, α_2^n 是W的一组基

线性无关. $k_1\alpha_1^n + k_2\alpha_2^n = 0$ $\forall n$

$n=0$ $k_1+k_2=0$

$n=1$ $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$

表出所有元素，因为 $\dim W = 2$

$C^2 \to W$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to u_n$ 满足 $\begin{cases} u_n = au_{n-1}+bu_{n-2} \\ u_0=a, u_1=b \end{cases}$

[1]Hamilton-Cayley 定理告诉我们，K[A] 至多 n 维.

这是C^2与W之间的同构.

8.2

- 子空间
- 子空间的维数定理

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

- 直和

例题

1. 设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是域 F 上线性空间 V 的 s 个真子空间，证明：如果 $charF \neq 0$, $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s \neq V$.

$S=2$时，结论不需要$\mathrm{char}\,F\neq 0$，$n=3$时需要 考虑$V=F_2^2=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cup\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\cup\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$\langle\alpha\rangle$表示α张成的子空间

数学归纳法，$S=2$时，成立.

假设$S=k-1$成立. $S=k$，取$\alpha\in V$，$\alpha\notin V_1\cup\cdots\cup V_{k-1}$. 若$\alpha\notin V_k$，结论成立

若$\alpha\in V_k$，取$\beta\in V$，$\beta\notin V_k$. 若$\beta\notin V_1\cup\cdots V_{k-1}$，结论成立.

若$\beta\in V_1\cup\cdots V_{k-1}$，考虑$\alpha+\beta$，若$\alpha+\beta\in V_1\cup\cdots V_{k-1}$，无法产生矛盾 因为$V_1\cup\cdots V_{k-1}$非子空间

2. 在数域 K 上的线性空间 $K^{M_n(K)}$ 中，如果 f 满足，对于任意的 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，任意的 n 维列向量 α, 以及任意 $k \in K$, $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 有

考虑$\{k\alpha+\beta\}$，无穷多元素.与V_i至多有一个共同元素. 存在$k_0\alpha+\beta\notin V_i$ $(i=1,\cdots k-1)$，$k_0\alpha+\beta\notin V_k$. 结论成立.

$$f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + \alpha, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n) + f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n)$$

$$f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, k\alpha_j, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n) = kf(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n)$$

那么称 f 是 $M_n(K)$ 上的列线性函数. 同理如果 $g(A^T)$ 是列线性函数，则称 $g(A)$ 是行线性函数。记所有的列/行线性函数组成的集合分别记为 V_1 和 V_2.

(a) 证明：V_1, V_2 都是 $K^{M_n(K)}$ 的子空间 验证$f_1,f_2\in V_1$，$c_1f_1+c_2f_2\in V_1$.

(b) 分别求 V_1, V_2 的一个基和维数

(c) 分别求 $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$ 的一个基和维数

(b) $f\in V_1$，$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=f(\sum_{j_1}\alpha_{1j_1}e_{j_1},\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ e_i为I_n的第i列

$f(\alpha_1,\cdots,0,\cdots,\alpha_n)=0$

$=\sum_{j_1}\alpha_{1j_1}f(e_{j_1},\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$=\sum_{j_1\cdots j_n}\alpha_{1j_1}\alpha_{2j_2}\cdots\alpha_{nj_n}f(e_{j_1},\cdots,e_{j_n})$，$\dim V_1=n^n$

$f_{i_1i_2\cdots i_n}(e_{j_1}\cdots e_{j_n})=\begin{cases}1 & i_1=j_1,\cdots,i_n=j_n\\ 0 & 否则.\end{cases}$

同理，$\dim V_2=n^n$

(c) $f\in V_1\cap V_2$，

某行某列为0，f取值均为0.

同理$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j_1,\cdots,j_n=1}^{n}\alpha_{1j_1}\cdots\alpha_{nj_n}f(e_{j_1},\cdots,e_{j_n})$

$=\sum_{j_1\cdots j_n为n排列}(\cdots\cdots\cdots)$

$\dim V_1\cap V_2=n!$

$\Rightarrow\dim(V_1+V_2)=2n^n-n!$

8.3

- 线性空间的同构
- 有限维线性空间同构的充要条件

例题

1. 令

$$H=\left\{\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{bmatrix}, z_1, z_2 \in C\right\}$$

   (a) H 对于矩阵的加法，以及实数和矩阵的乘法构成一个实线性空间

   (b) 给出 H 的一个基和维数

   (c) 证明: H 与 R^4 同构，并写出 H 到 R^4 的一个同构映射

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -\overline{c+di} & \overline{a+bi} \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Hamilton 四元数 $1, i, j, k$

$i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=-ji=k,\ jk=-kj=i,\ ki=-ik=j.$

2. 设 $A \in M_n(K)$, 令 $AM_n(K)=\{AB, B\in M_n(K)\}$.

   (a) 证明 $AM_n(K)$ 是数域 K 上线性空间 $M_n(K)$ 的子空间

   (b) 设 A 的列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的一个极大线性无关组为 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$, 证明 $AM_n(K)$ 和 $M_{r\times n}(K)$ 同构，并写出一个同构映射.

   (c) 证明: $\dim[AM_n(K)] = \operatorname{rank}(A)n$.

(b) $f: AM_n(K) \longmapsto M_{r\times n}(K)$

$AB \longmapsto A_1B$

$A=(\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r})A_1.\ A_1\in M_{r\times n}$, 行满秩.

良定义: $AB_1=AB_2 \Leftrightarrow (\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r})A_1(B_1-B_2)=0$

$\Leftrightarrow A_1(B_1-B_2)=0$ ✓ $D\in M_{n\times r}$

满: $\forall C\in M_{r\times n}(K)$, $A_1B=C$, A_1行满秩, 有右逆. $A_1D=I_r$

取 $B=DC$ 即可.

单: $A_1B=0$

$\Rightarrow (\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r})A_1B=0 \Rightarrow AB=0.$

8.4

- 商空间
- $\dim(V/W)=\dim V-\dim W$

例题

1. 设 U, W 都是域 F 上线性空间 V 的子空间, 证明 $(U+W)/W \cong U/(U\cap W)$

$\dim((U+W)/W)=\dim(U+W)-\dim W$

$\dim(U/U\cap W)=\dim U-\dim(U\cap W)$ 维数相等, 同构.

但无穷维?

$u+w+W=u+W \longmapsto u+U\cap W$

良定义: $u_1+W=u_2+W \Rightarrow u_1-u_2\in U\cap W$

单射: $u+U\cap W=0 \Rightarrow u\in U\cap W \Rightarrow u+W=0.$

验证满射, 线性.

9.1-4

- 线性映射，线性变换，线性函数
- 线性映射的核与像:

   1. $\dim(\operatorname{Ker} A)+\dim(\operatorname{Im} A)=\dim V$

2. 有限维线性变换，单等价于满

- 线性映射的矩阵表示:

  1. $Hom(V, V') \cong M_{s\times n}(F)$
  2. 相似矩阵 $\Longleftrightarrow$ 线性变换在不同基下的表示

- 线性映射的行列式，秩，迹，特征值，特征向量等

例题

1. 设 $A \in Hom(V, V)$, 证明对于任意的 k,

$$\mathrm{rank}\, A^k - \mathrm{rank}\, A^{k+1} \geq \mathrm{rank}\, A^{k+1} - \mathrm{rank}\, A^{k+2}$$

Jordan标准型，$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{i\times i}$ 块数为 n_i

$\mathrm{rank} A = n - (n_1 + \cdots + n_n)$

$\mathrm{rank} A^2 = \mathrm{rank} A - (n_2 + \cdots + n_n)$

$\vdots$

$\mathrm{rank} A^{k+1} = \mathrm{rank} A^k - (n_{k+1} + \cdots + n_n)$

$\mathrm{rank} A^{k+2} = \mathrm{rank} A^{k+1} - (n_{k+2} + \cdots + n_n)$

$\Rightarrow \mathrm{rank} A^{k+1} - \mathrm{rank} A^{k+2} = \mathrm{rank} A^k - \mathrm{rank} A^{k+1} - \boxed{n_k}$

设 $\mathrm{rank} A^{k+1} - \mathrm{rank} A^{k+2} = s$.

取线性无关 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \mathrm{Im} A^{k+1}$，但 $\notin \mathrm{Im} A^{k+2}$

$\alpha_i = A^{k+1}\beta_i$, $\beta_i \in V$.

证：$A^k\beta_i \in \mathrm{Im} A^k$，但 $\notin \mathrm{Im} A^{k+1}$

且线性无关.

2. 设 f 是 $M_n(K)$ 上的线性函数，且对于任意的 $A, B \in M_n(K), f(AB) = f(BA)$, 求证 $f = c\mathrm{tr}$, 其中 c 是某一常数，tr 是迹算子.

$e_{ij} e_{st} = e_{it}\delta_{js}$

$\Rightarrow e_{ij} e_{jk} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ e_{ii} & i = k \end{cases}$

$\underset{f(e_{ik})}{\underset{\parallel}{f(e_{ij}e_{jk})}} = f(e_{jk}e_{ij}) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ f(e_{ii}) & i = k. \end{cases}$

$f(A) = \sum_{ij} a_{ij} f(e_{ij}) = \sum_i a_{ii} f(e_{ii}) = \left(\sum_i a_{ii}\right) f(e_{11})$

$= f(e_{11}) \mathrm{tr}(A)$.

3. (Frobenius 秩不等式) 设 V, U, W, M 都是域 F 上的线性空间, 并且 V, U 都是有限维的, 设 $A \in Hom(V, U), B \in Hom(U, W), C \in Hom(W, M)$. 证明,

$$\mathrm{rank}(CBA) \geq \mathrm{rank}(CB) + \mathrm{rank}(BA) - \mathrm{rank}(B).$$

$\mathrm{rank}(CBA) = \mathrm{rank}(C|_{\mathrm{Im}B} \cdot BA)$

$\geq \mathrm{rank}(C|_{\mathrm{Im}B}) + \mathrm{rank}(BA) - \dim(\mathrm{Im}\, B)$

$= \mathrm{rank}(CB) + \mathrm{rank}(BA) - \mathrm{rank}\, B$

当 $U = W$, $B = I_n$ 时，即：$\mathrm{rank}(CA) \geq \mathrm{rank}\, C + \mathrm{rank}\, A - n$.

4. (幂零矩阵的矩阵表示) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, A 是 V 上的一个线性变换. 如果 $A^{n-1} \neq 0, A^n = 0$, 那么在 V 中存在一个基，使得 A 在此基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\exists \alpha \in V$, $A^{n-1}\alpha \neq 0$, $A^n \alpha = 0$

取 $A^{n-1}\alpha, A^{n-2}\alpha, \cdots, A\alpha, \alpha$ 即可.

证明这是一组基.

5. 设 V 和 V' 分别是域 F 上 n 维，s 维线性空间，A 是 V 到 V' 的一个线性映射，证明存在 V 的一个基和 V' 的一个基，使得 A 在这对基下的矩阵为,

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $r = \text{rank}(A)$.

取 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}$ 为 $\ker A$ 的基，扩为 V 的基.

$A(\alpha_{n-r+1}, \cdots \alpha_n) = (A\alpha_{n-r+1}, \cdots, A\alpha_n)$ 为 $\mathrm{Im} A$ 的基.

扩为 V' 的基. 这两组基满足条件.

6. (两两正交的幂等变换的充要条件) 设 $A_i \in M_n(K)$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 其中 K 是数域. 令 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_s$.

(1) 证明: 如果

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A_1) + \text{rank}(A_2) \cdots + \text{rank}(A_s),$$

那么

$$AM_n(K) = A_1 M_n(K) \oplus A_2 M_n(K) \oplus \cdots \oplus A_s M_n(K).$$

(2) 证明: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两正交的幂等矩阵, 当且仅当 A 是幂等矩阵，并且

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A_1) + \text{rank}(A_2) \cdots + \text{rank}(A_s).$$

见课本阅读材料.

(1) $\dim A_i M_n(K) = \text{rank} A_i \cdot n$.

等号两边维数相等 $\Rightarrow$ 所以直和？ X

需说明 $AM_n(k) = A_1 M_n(k) + \cdots + A_s M_n(k)$

由 $A = A_1 + \cdots + A_s$ 显然.

(2) $\Rightarrow$ $A = A_1 + A_2 + \cdots A_n$

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 = A_1 + \cdots + A_n = A$

幂等阵 B, $B^2 - B = 0$ 特征值只有 0, 1

$B(B-I) = 0$

$\mathrm{Im}(B-I) \subseteq \ker B$

$\mathrm{Im}(B-I) \supseteq \ker B$?

$\forall Bx = 0$. $x = (B-I)(-x) \in \mathrm{Im}(B-I)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(B-I) = \ker B$

$\dim\ker(B-I) + \dim(\mathrm{Im}\, B-I) = n$

$\Rightarrow \dim\ker(B-I) + \dim\ker B = n$

可对角化. $\mathrm{tr} B = \text{rank} B$. √

$\Leftarrow$

$A_i \in AM_n(K)$

$A_i = AB_i = A^2 B_i = AA_i$

$A_i = 0 + \cdots + A_i + 0 \cdots + 0$

$AA_i = A_1 A_i + \cdots + A_i^2 + \cdots + A_s A_i$

$\Leftrightarrow A_j A_i = 0 \quad j \neq i$

$A_i^2 = A_i$