线性代数 A(II) 习题课讲义 04

Caiyou Yuan

April 10, 2022

9.5

- 不变子空间
- 若 $f(x) = f_1(x)f_2(x), (f_1(x), f_2(x)) = 1$, 则

$$\operatorname{Ker} f(A) = \operatorname{Ker} f_1(A) \oplus \operatorname{Ker} f_2(A)$$

例题

1. 设 W 是 V 上线性变换 A 的不变子空间

   (a) 若 A 可逆, $A|_W$ 可逆么?

   (b) 若 A 可对角化, $A|_W$ 可对角化么?

(a) $A(W) \subseteq W$.

由A为单射, 有限维 $\Rightarrow$ 满射, $A(W)=W$, $A|_W$可逆

无穷维, 不满. 反例: $V = \{f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}$

$Af(x) = f(x+1)$

$W = \{f: f(0) = f(1) = \cdots = 0\}$.

$A(W) \subsetneq W$. 不可逆.

(b) $A|_W$可对角化.

①最小多项式

A可对角化, 则最小多项式m_A为一次因式乘积.

$\forall x \in W$, $m_A(A|_W)x = m_A(A)x = 0 \Rightarrow m_{A|_W} \mid m_A$

$\Rightarrow$ $A|_W$最小多项式也为一次因式乘积. 可对角化.

② 记A特征值为λ_i, $V_i = \{v \in V, Av = \lambda_i v\}$.

由可对角化, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$

$\forall x \in W$, $x = v_1 + \cdots + v_s$, $v_i \in V_i$

下证 $v_i \in W$, 则证毕.

对s用数学归纳.

$s=1$ ✓

$s-1$成立, 则 $Ax - \lambda_1 x = (\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + (\lambda_s - \lambda_1)v_s \in W$.

$\Rightarrow$ 由归纳假设, $v_2, \cdots v_s \in W$. $\Rightarrow v_1 \in W$.

上述证明对任意V均成立(有限维 无限维)

2. (同时对角化的充分必要条件) 设 $A_1, \cdots, A_m$ 是域 F 上线性空间 V 上的线性变换, 每一个都可以对角化, 证明: 他们可以在某一组基下同时对角化的充分必要条件是他们的乘积可交换, 即 $A_iA_j = A_jA_i$.

必要性显然.

充分性: 对m数学归纳.

$m=1$ 成立

假设$m-1$时成立.

记A_1的特征空间为$V_1, \cdots, V_s$.

$\forall x \in V_i$, $i = 1, \cdots, s$

$A_1A_jx = A_jA_1x = (A_jx)\lambda_i$, $j = 2, \cdots, m$.

$\Rightarrow A_jx \in V_i$.

考虑: $A_2|_{V_i}, \cdots, A_m|_{V_i}$

均可对角化, 且可乘积可交换.

由归纳假设, 可同时对角化.

取基为$\{x_1^i, \cdots, x_{k_i}^i\}$, $k_i = \dim V_i$

取遍$V_1, \cdots, V_s$. 得V的一组基, $V_1, \cdots, V_m$均可对角化.

3. 设 A 是域 F 上有限维线性空间 V 上的一个线性变换,

   (a) 设 $f(x), g(x) \in F[x]$, $(f(x), g(x)) = d(x), [f(x), g(x)] = m(x)$, 证明,

$$\operatorname{Ker} d(A) = \operatorname{Ker} f(A) \cap \operatorname{Ker} g(A)$$

$$\operatorname{Ker} m(A) = \operatorname{Ker} f(A) + \operatorname{Ker} g(A)$$

① 这里略去A. kerd 表示 ker d(A)

$\forall x \in \ker d$, $f(A)x = 0$, $g(A)x = 0$ $\Rightarrow$ $\ker d \subseteq \ker f \cap \ker g$ ✓

$d = \lambda f + \mu g$ $\Rightarrow$ ... $\supseteq$ ...

② $\forall x \in \ker f + \ker g \Rightarrow x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \ker f$, $x_2 \in \ker g$.

$m(A)x = m(A)x_1 + m(A)x_2 = 0$. ✓

$\forall x \in \ker m$，由于 $f = f_1 d$，$g = g_1 d$，$(f_1, g_1) = 1$，且 $m = f_1 g_1 d$

$1 = \lambda f_1 + \mu g_1 \Rightarrow x = \underbrace{\lambda(A) f_1(A) x}_{\in \ker g} + \underbrace{\mu(A) g_1(A) x}_{\in \ker f}$

(b) 设 A 的最小多项式为 $m(x)$，而 $f(x), g(x) \in F[x]$，$f|m$，$g|f$，但 f, g 并不相伴，证明，$\operatorname{Ker} g(A) \subsetneq \operatorname{Ker} f(A)$.

找到 $y \in \ker f(A)$，但 $y \notin \ker g(A)$.

$m = f_1 f$，$f = g_1 g$. $\deg g_1 > 0$.

令 $g_2 = f_1 g$，$\deg g_2 < \deg m$，则存在 x，$g_2(A)x \neq 0$.

令 $y = f_1(A)x$，则 $g(A)y \neq 0$，但 $f(A)y = 0$. 得证

(c) 若 f 为非零多项式，证明 $\operatorname{Ker} f(A) = 0$ 的充分必要条件是 f 和 m 互质.

充分性：互质，$0 = \ker f(A) \cap \ker m(A) = \ker f(A)$

必要性，假设 f, m 的最大公因式为 d（首一）

$\ker d(A) = \ker f(A) \cap \ker m(A) = 0$

由于 $d | m$，$1 | d$，若 $\deg d > 0$，则由(b)，$\ker d(A) \supsetneq \ker 1(A) = 0$. 矛盾. 故 $d = 1$.

(d) 若 f 为非零首一多项式，且 $f|m$，证明 f 是 $A|_{\operatorname{Ker} f(A)}$ 的最小多项式.

（$\ker f(A)$ 是 A 的不变子空间，$A|_{\ker f(A)}$ 良定义）

设 $A|_{\ker f(A)}$ 的最小多项式为 n

① $\forall x \in \ker f(A)$. $f(A|_{\ker f(A)})x = f(A)x = 0$

$\Rightarrow n | f$

② 若 $n \neq f$，则由(b)，$\ker n(A) \subsetneq \ker f(A)$.

但 $\underbrace{\ker n(A) \supseteq \ker f(A)}$. 矛盾.

$\forall x \in \ker f(A)$，$n(A)x = n(A|_{\ker f(A)})x = 0$.

9.6-7

- Hamilton-Cayley 定理: 对于线性变换 A 的特征多项式 $f(x)$，有 $f(A) = 0$
- 线性变换的最小多项式

  1. 如果 V 能分解成一些非平凡不变子空间的直和,

$$V = W_1 \oplus W_2 \cdots \oplus W_s$$

则 A 的最小多项式 $m(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$, 其中 $m_j(\lambda)$ 是 W_j 上变换 $A|_{W_j}$ 的最小多项式.

2. A 可以对角化的充分必要条件是，A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 可以在 $F[\lambda]$ 中分解成不同的一次因式的乘积.

例题

1. 设 A, B 分别是 n, m 阶复矩阵. 证明：矩阵方程 $AX - XB = 0$ 只有零解的充分必要条件是 A 和 B 没有公共特征值.

必要性：否则若A,B有公共特征值. $Ax=\lambda x$, $B^Ty=\lambda y$

$X = xy^T \neq 0$ 是$AX-XB=0$的非零解.

充分性：A,B的特征多项式在$C[x]$上互质.

$u(A)f(A)+v(A)g(A)=I$.

$\Rightarrow v(A)g(A)=I$. 由$AX=XB$, 则 $g(A)X=Xg(B)=0$. $\Rightarrow X=0$

2. 设 $A \in M_{n\times n}(K)$ 可以对角化, $M_{n\times n}(K)$ 上的线性变换 $\mathcal{A}: X \to AX - XA$, 那么 $\mathcal{A}$ 可以对角化么?

$A=S\Lambda S^{-1}$

$AX-XA=\lambda X$

即：$S\Lambda S^{-1}X - XS\Lambda S^{-1} = \lambda X$

$\Lambda S^{-1}XS - S^{-1}XS\Lambda = \lambda S^{-1}XS$

令 $Y=S^{-1}XS$

$\Lambda Y - Y\Lambda = \lambda Y$

$\lambda_i y_{ij} - \lambda_j y_{ij} = \lambda y_{ij}$

$\Rightarrow \lambda = \lambda_i - \lambda_j, (y_{ij}\neq 0)$

特征值为 $\lambda_i-\lambda_j$

特征向量 $SE_{ij}S^{-1}$.

3. 设 A 是域 F 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换，A 有 s 个不同的特征值，可以对角化，属于特征值 λ_i 的特征子空间的维数是 n_i.

(a) 证明,

$$\dim C(A) = \sum_i n_i^2$$

(b) 说明若 $s < n$,

$$F[A] \subsetneq C(A)$$

若 $s = n$,

$$F[A] = C(A)$$

(a) $AB=BA$

$A=S\Lambda S^{-1}$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_s)$

$S\Lambda S^{-1}B = BS\Lambda S^{-1}$

$\Lambda\boxed{S^{-1}BS} = \boxed{S^{-1}BS}\Lambda$.

$\Downarrow$ 块对角, 自由变量为$\sum_i n_i^2$个.

(b) $\dim F[A] = s$, 最小多项式为

当$s<n$时, $\dim F[A] = s < n = \sum_i n_i < \sum_i n_i^2$

$s=n$时, $\dim F[A] = \dim C(A)$.

(c) P148 15题. 易证.