线性代数 A(II) 习题课讲义 06

Caiyou Yuan

May 8, 2022

1 Jordan 标准形

推导线性变换的 Jordan 标准形，可以通过空间分解的方法，也可以通过 λ-矩阵的方法。

1.1 根子空间直和分解

Theorem 1. *设 A 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，如果 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中分解为一次因式的乘积：*

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{l_s}, \tag{1.1}$$

则 V 中存在一个基，A 在此基下的矩阵为 Jordan 形.

Proof. 由空间分解 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$，其中 $W_j = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)^{l_j}$, 考虑 $B_j = (A - \lambda_j I)|_{W_j}$ 是 W_j 上的幂零变换, 根据幂零变换的性质，以及 $A|_{W_j} = B_j + \lambda_j I|_{W_j}$, 可得 Jordan 标准形. 详细证明见课本. □

Remark. *B_j 的幂零指数为？最小多项式为？*

l_j. 因为 $\ker(A-\lambda_j I)^{k-1} \subsetneq \ker(A-\lambda_j I)^{k}$. $k=1,2,\cdots,l_j$

(讲义4结论)

Remark. *(根子空间的定义，课本 P139) 如果 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可以分解为*

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{r_s}, \tag{1.2}$$

则

$$V = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_1 I)^{r_1} \oplus \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_2 I)^{r_2} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_s I)^{r_s}.$$

其中 $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_j I)^{r_j}$ 称为 A 的根子空间. 证明 $W_j = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_j I)^{r_j}, \dim W_j = r_j$.

$\ker(A-\lambda_j I)^{k-1} = \ker(A-\lambda_j I)^{k}$, $k=l_j+1, l_j+2, \cdots$

① 证明 $\ker(A-\lambda_j I)^{l_j} = \ker(A-\lambda_j I)^{l_j+1}$ 即可.

$m(\lambda)(\lambda-\lambda_j) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_j)^{l_j+1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$

$\Rightarrow V = W_1 \oplus \cdots \oplus \ker(A-\lambda_j I)^{l_j+1} \oplus \cdots \oplus W_s$

结合 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$, 易知 $\dim \ker W_j = \dim \ker(A-\lambda_j I)^{l_j+1}$

而 $W_j \subseteq \ker(A-\lambda_j I)^{l_j+1}$. 证毕.

② 记 $\dim W_j = n_j$. 取 W_j 的一组基 $(j=1,\cdots,s)$. 此基下, A 为块对角矩阵 $\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_s)$

$f(\lambda) = |\lambda I - A| = |\lambda I_{n_1} - A_1||\lambda I_{n_2} - A_2|\cdots|\lambda I_{n_s} - A_s|$. 记 $f_j(\lambda) = |\lambda I_{n_j} - A_j|$, 为 $A|_{W_j}$ 的特征多项式, $A|_{W_j}$ 的最小多项式为 $(\lambda-\lambda_j)^{l_j}$. 故 $f_j = (\lambda-\lambda_j)^{n_j}$

$\Rightarrow f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$. 由 $f(\lambda)$ 的唯一分解性知，$n_j=r_j$.

Remark. 说明条件(1.1)和(1.2)互相等价. 或者进一步证明，$m(\lambda)$ 和 $f(\lambda)$ 具有相同的不可约因式.

$m(\lambda)$ 的不可约因式必为 $f(\lambda)$ 的不可约因式，因为 $m(\lambda)\mid f(\lambda)$

反过来，$p(\lambda)$ 为 $f(\lambda)$ 的不可约因式. 在代数闭的扩域 E 上. 不妨设 $\bar\lambda\in E$,

$p(\bar\lambda)=0$. $\Rightarrow \bar\lambda$ 为 A 特征值. 存在非零向量 $x\in E^n$, $Ax=\bar\lambda x$

将 A 看成是 F 上的矩阵
自然延拓为 E 上的矩阵.

$\Rightarrow m(A)x=m(\bar\lambda)x$

$\Rightarrow m(\bar\lambda)=0$

即：$m(\lambda)$ 与 $p(\lambda)$ 在 $E[\lambda]$ 上不互质

$\Rightarrow m(\lambda)$ 与 $p(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 上不互质

由 $p(\lambda)$ 不可约，$\Rightarrow p(\lambda)\mid m(\lambda)$

Remark. 当条件(1.1)不成立，考虑矩阵的有理标准形.

最小多项式不随数域扩大而改变.
分别记为 m_F 与 m_E.
① $m_E\mid m_F$ 在 $E[\lambda]$ 中.
② 记 $r=\deg m_E$.
$I, A, A^2, \cdots, A^r$ 线性相关, $M_n(E)$ 中
$\Rightarrow I, A, A^2, \cdots, A^r$ 在 $M_n(F)$ 中也线性相关.
$\Rightarrow \deg m_F\le\deg m_E$. 故：$m_F=m_E$（只差常数，首一）

假设 $v_1,\cdots,v_r\in M_n(F)$, F 线性无关.
则 $v_1,\cdots,v_r$ 也 E 线性无关.
因为 $\sum e_iv_i=0$
E 看成 F 线性空间
基为 $e'_1,\cdots,e'_n$
$e_i=\sum f_{ij}e'_j$, $f_{ij}\in F$.
$\Rightarrow \sum_{ij} f_{ij}e'_jv_i=0$
$\Rightarrow \sum_i f_{ij}v_i=0$ $\forall j$
v_i 线性无关，
$\Rightarrow f_{ij}=0$
$\Rightarrow e_i=0$
得证.

1.2 λ-矩阵

λ-矩阵的等价，以及不变因子、行列式因子的定义，详见讲义 01.

Theorem 2. 数域 F 上的两个矩阵 A 和 B 相似的充要条件是 $\lambda I-A$ 和 $\lambda I-B$ 等价.

Proof. 证明略，详见《高等代数学习指导用书（下册）》P439-440. □

上述定理将数字矩阵相似的问题，转化为了 λ-矩阵等价的问题. 而我们知道，λ 矩阵等价的充要条件是具有相同的不变因子/行列式因子.

Definition 1. 如果 $\lambda I-A$ 的不变因子可以分解为若干一次因式的幂次乘积，我们把这些一次因式的幂次称为 $\lambda I-A$ 或 A 的初等因子.

Remark. 说明 $\lambda I-A$ 的不变因子可以分解为一次因式的幂次乘积和条件(1.1)等价. 可以通过说明 $\lambda I-A$ 的最后一个不变因子 $d_n(\lambda)=m(\lambda)$. 也可以通过说明 $\lambda I-A$ 的最后一个行列式因子 $D_n(\lambda)=f(\lambda)$.

① $d_n(\lambda)=m(\lambda)$. （复数域上）

每一个初等因子对应一个 Jordan 块. 块对角矩阵的最小多项式为各块最小多项式的最小公倍式. 即：$m(\lambda)=\{(\lambda-\lambda_j)^{r_{ij}}\}$ 最小公倍式 $=d_n(\lambda)$.

其他域上也成立. 因为 $d_n(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 均不随数域扩大而变化

② $D_n(\lambda)=f(\lambda)$ 显然，而 $d_i\mid D_n(\lambda)$，故 $f(\lambda)$ 可分解为一次因式乘积时，D_n 也可，d_i 也均可.

Remark. 说明在条件(1.1)下，λ 矩阵等价的充要条件是具有相同的初等因子.

只须说明，不变因子与初等因子互相确定

$d_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{l_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_{1s}}$
$d_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_{21}}(\cdots)^{l_{22}}\cdots(\quad)^{l_{2s}}$
$\vdots$
$d_r(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_{r1}}(\quad)^{l_{r2}}\cdots(\quad)^{l_{rs}}$

矩阵：$\begin{bmatrix} l_1 & l_{12} & \cdots & l_{1s} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2s} \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & l_{rs} \end{bmatrix}$

取出大于0的部分
即为初等因子

非减数列

例题

1. 求

$$J_n(\hat\lambda)=\begin{pmatrix} \hat\lambda & 1 & & & \\ & \hat\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \hat\lambda & 1 \\ & & & & \hat\lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$$

由初等因子，只须按上述方式
按列，空位置补0.
每行相乘即为不变因子.

的所有初等因子, 不变因子和行列式因子.

不变/行列式因子: $\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-1},(\lambda-\bar{\lambda})^n$

初等因子: $(\lambda-\bar{\lambda})^n$

2. (1) 设

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda)\end{pmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda)\end{pmatrix},$$

如果多项式 $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$ 互素，则 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 等价.

考虑行列式因子, 只须证, $(f_1g_1, f_2g_2)=(f_2g_1, f_1g_2)$

$f_1=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}$ f_1与g_1,g_2互素, 即: $\forall i$ $a_ic_i=0$, $a_id_i=0$ $(*)$

$f_2=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_s^{b_s}$ f_2与g_1,g_2互素, 即: $\forall i$ $b_ic_i=0$, $b_id_i=0$

$g_1=p_1^{c_1}p_2^{c_2}\cdots p_s^{c_s}$ $(f_1g_1,f_2g_2)=p_1^{\min(a_1+c_1,b_1+d_1)}\cdots p_s^{\min(a_s+c_s,b_s+d_s)}$

$g_2=p_1^{d_1}\cdots p_s^{d_s}$ $(f_2g_1,f_1g_2)=p_1^{\min(b_1+c_1,a_1+d_1)}\cdots p_s^{\min(b_s+c_s,a_s+d_s)}$

只须证: $\forall i$ $\min(a_i+c_i,b_i+d_i)=\min(b_i+c_i,a_i+d_i)$ $(**)$

(2) 对于对角 λ-矩阵 $D(\lambda)$, 假设对角元素可以分解为一次因式方幂的乘积，证明所有这些一次因式的方幂就是 $D(\lambda)$ 的全部初等因子.

由$(*)$知, a_i,b_i中任一非零, $c_i=d_i=0$. $(**)$式成立. $a_i=b_i=0$时, $(**)$也成立. $\Rightarrow$ 故证毕.

由(1)易知.

注意到, 全部初等因子的乘积即为全部不变因子的乘积 即为 D_n, 即为特征多项式. 即次数之和为n. 故每个初等因子对应一个Jordan块, 全部初等因子确定了Jordan标准形(顺序除外).

(3) 求

$$J=\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_s}(\lambda_s)\end{pmatrix}$$

的所有初等因子.

$(\lambda-\lambda_1)^{n_1}$

$(\lambda-\lambda_2)^{n_2}$

$\vdots$

$(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

(可能$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$中有相等的)

(4) 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

在复数域上的 Jordan 标准型.

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & -3\\ \lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \lambda & -3\\ 0 & 2-\lambda(\lambda+1) & -6+3(\lambda+1)\\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 3\lambda-3\\ 0 & -(\lambda-1) & 3\lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & -\lambda^2+2\lambda-1 & 3\lambda-3\\ & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & (\lambda-1)^2 & \\ & & \lambda-1\end{pmatrix}$$

不变因子为 $1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2$

初等因子为 $\lambda-1,\ (\lambda-1)^2$. 标准形 $\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}$

2 Jordan 标准形的应用

级数 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$ 的收敛半径为 $+\infty$.

2.1 计算矩阵指数函数

矩阵指数函数

$$e^A=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i}{i!}$$

在求解常微分方程组时具有广泛应用.

(a) 齐次一阶线性常系数常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax,\\ x(0)=x_0.\end{cases}$$

的唯一解为 $x(t)=e^{At}x_0$. 例如求解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{pmatrix}x$$

的通解. $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{pmatrix}$, 特征值 1, 2(2重)

特征值1, 特征向量 $\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$

特征值2, ⋯ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 不可对角化.

$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&1&4\\0&0&0\\0&3&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&12&-4\\0&0&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

$(A-2I)\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\0\\0\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}-4&13&0\\0&0&1\\1&0&3\end{pmatrix}$

(b) 齐次高阶线性常系数常微分方程

$$\begin{cases}x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_1x^{(1)}+a_0x=0\\ x(0)=x_0\\ x^{(1)}(0)=x_0^{(1)}\\ \vdots\\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}\end{cases}$$

其中 $x^{(i)}(t)=\frac{\mathrm{d}^ix}{\mathrm{d}t^i}(t)$. 可以转化为方程组情形. 例如求解 $x^{(3)}-3x^{(2)}-6x^{(1)}+8x=0$ 的通解.

$AP=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$ $\qquad\begin{pmatrix}2t&t\\&2t\end{pmatrix}^2$

$\Rightarrow e^{At}=Pe^{\begin{pmatrix}1&&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}t}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix}e^t&&\\&e^{2t}&te^{2t}\\&&e^{2t}\end{pmatrix}P^{-1}=\cdots$

2.2 计算矩阵平方根

(1) 设 a 是域 $\mathbb{F}$ 中的非零元, 求 $J_r(a)^2$ 的标准型.

$J_r(a)=\begin{pmatrix}a&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&a\end{pmatrix}=aI+J$

$J_r^2(a)=(aI+J)^2=a^2I+2aJ+J^2$

$=\begin{bmatrix}a^2&2a&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&\ddots&2a\\&&&&a^2\end{bmatrix}$

$\mathrm{rank}(a^2I-J_r^2(a))=r-1$ $=$

仅有一块Jordan块.

标准形 $J_r(a^2)$

(2) 任意的可逆复矩阵都有平方根.

每一块取平方根. $J_r(a)$ 平方根 $J_r(\sqrt{a})$.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

是否有平方根，若有给出一个.

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \lambda+2 & 0 \\ -\lambda+2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda+2 & \lambda^2 & 0 \\ 1 & -\lambda & \lambda-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda^2 & 0 \\ & -\lambda & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda^2 & \lambda^2 \\ & -\lambda & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda^2 & \lambda^2 \\ & \lambda & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \lambda \\ & \lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \lambda^2(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 无平方根.

(4) 证明:不可逆的复矩阵有平方根,当且仅当其标准型中主对角元为 0 的 Jordan 块或是 $J_1(0)$, 或是 $J_r(0), J_r(0)$ 成对出现，或是 $J_r(0), J_{r+1}(0)$ 成对出现.

充分性：$J_1^2(0) = J_1(0)$

$J_{2r}^2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rank} J_{2r}^2(0) = 2r-2$. 两块Jordan块.

$\operatorname{rank} J_{2r}^4(0) = 2r-4$

$\operatorname{rank} J_{2r}^6(0) = 2r-6$

$\Rightarrow r$ 块有2块.

$\operatorname{rank} J_{2r}^{2r}(0) = 0$

$J_{2r}^2(0) \sim \begin{pmatrix} J_r(0) & \\ & J_r(0) \end{pmatrix}$

$J_{2r+1}^2(0) \sim \begin{pmatrix} J_r(0) & \\ & J_{r+1}(0) \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{rank}(J_{2r+1}^2)^{r-1} = 3 \\ &\operatorname{rank}(J_{2r+1}^2)^{r} = 1 \\ &\operatorname{rank}(J_{2r+1}^2)^{r+1} = 0 \end{aligned}}$$

必要性：

$(r \geq 2)$

若 $J_r(0) = A^2$

$\Rightarrow A^{2r-2} \neq 0$

$A^{2r} = 0$.

A 为幂零阵. 幂零指数 $\geq 2r-1 > r$

矛盾.

若 $\begin{pmatrix} J_r(0) & \\ & J_{r+k}(0) \end{pmatrix} = B^2$, $(B^2)^{r+k-1} \neq 0$, $(B^2)^{r+k} = 0$

$k \geq 2$

B 为幂零阵, 幂零指数 $\geq 2r+2k-1 > 2r+k$.

矛盾.