线性代数 A(II) 习题课讲义 07

Caiyou Yuan

May 23, 2022

---

1 具有度量的线性空间

1.1 双线性函数

- 双线性函数, 及其在基下的度量矩阵: 不同基下的度量矩阵是合同的, 以及合同的矩阵可以看作是同一双线性函数在不同基下的度量矩阵;
- 对称/反对称的双线性函数/矩阵, 及其标准形式
  1. 特征不为 2 的域上, 对称矩阵可以合同于对角矩阵
  2. 特征不为 2 的域上, 反对称矩阵合同于

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

  3. 特征为 2 的域 F 上, 因为 $\forall a \in F, -a = a$, 所以对称矩阵和反对称矩阵相同.
     - 若 $\exists \alpha \in F^n$, 使得 $\alpha^T A\alpha \neq 0$, 则 A 可以合同于一个对角矩阵;
     - 若 $\forall \alpha \in F^n$, 使得 $\alpha^T A\alpha = 0$, 则 A 可以合同于矩阵1.1.

1.2 对称双线性函数和二次型的关系

设 V 是域 F 上的线性空间, 映射 $q : V \to F$ 定义为 V 上的二次函数, 如果存在 V 上的对称双线性函数 f, 使得 $\forall \alpha \in V, q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$. 若 $\operatorname{char} F \neq 2$, 则二次函数和对称双线性函数一一对应, 因为注意到,

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[q(\alpha+\beta) - q(\alpha) - q(\beta)].$$

1.3 双线性函数空间

V 上的所有双线性函数, 关于函数的加法和数乘, 构成域 F 上的线性空间, 记为 $T_2(V)$. 易见 $T_2(V) \cong M_n(F) \cong Hom(V, V)$.

例题 取 V^* 中的对偶基为 $\{f_i\}_{i=1}^n$, 证明 $f_i \otimes f_j$ 是 $T_2(V)$ 的一组基, 其中 $(f\otimes g) \in T_2(V)$, 定义为 $(f\otimes g)(\alpha,\beta) = f(\alpha)g(\beta)$.

1.4 例题

设 f 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数,

1. (a) 映射 $L_f : \alpha \to \alpha_L$ 是 V 到 V^* 的线性映射;

   (b) f 是非退化的当且仅当 L_f 是线性空间 V 到 V^* 的一个同构映射.

   说明L_f为单射，$L_f\alpha=0$ 即 $f(\alpha,\beta)=0$. $\forall\beta$

   由于f非退化，$\alpha=0$.

2. 若 f 非退化

   (a) 任给 V 上的一个双线性函数 g, 存在 V 上唯一的一个线性变换 G, 使得

$$g(\alpha,\beta) = f(G\alpha,\beta), \forall \alpha,\beta \in V$$

存在性：$g(\alpha,\beta)=\alpha_L^g\beta$，$\alpha_L^g\in V^*$

L_f为V到V^*的同构：$\exists\alpha'\in V$，$L_f\alpha'=\alpha_L^g$

取变换$G:\alpha\mapsto\alpha'$，即证G线性即可.

唯一性显然.

   (b) 令 $\sigma : g \to G$, 则 σ 是 $T_2(V)$ 到 $Hom(V,V)$ 的一个同构映射.

   说明σ的线性：$(g_1+g_2)(\alpha,\beta)=g_1(\alpha,\beta)+g_2(\alpha,\beta)=f(G_1\alpha,\beta)+f(G_2\alpha,\beta)$

   $=f((G_1+G_2)\alpha,\beta)$

   $(kg)(\alpha,\beta)=kg(\alpha,\beta)=kf(G\alpha,\beta)=f((kG)\alpha,\beta)$

   由(a)知σ良定义

   (c) 证明 V 中存在一个基使得 f, g 在此基下的度量矩阵都是对角矩阵的充分必要条件是 G 可以对角化.

   $\forall G$，$f(G\alpha,\beta)$是关于α,β双线性，则σ满，$G=0$时，$f(0\alpha,\beta)$为0双线性函数，σ单.

   设域F的特征不为2，且f,g对称，f非退化

   充分性：取$V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$为$G$特征值.

   $g(\alpha_i,\alpha_j)=f(G\alpha_i,\alpha_j)=\lambda_i f(\alpha_i,\alpha_j)$ $\Rightarrow$ 由于$\lambda_i\neq\lambda_j$，$f(\alpha_i,\alpha_j)=0$.

   $g(\alpha_j,\alpha_i)=\cdots\cdots\ \lambda_j f(\alpha_i,\alpha_j)$

   在V_{λ_k}中取基使f的度量矩阵对角

   $g(\alpha_{km},\alpha_{kn})=\lambda_k f(\alpha_{km},\alpha_{kn})$

   则g也对角.

   必要性：取f,g度量矩阵对角的基$\beta_1,\cdots,\beta_n$

   固定i，$\forall j\neq i$，$0=g(\beta_i,\beta_j)=f(G\beta_i,\beta_j)$

   $G\beta_i=\sum_s k_s\beta_s$，$\Rightarrow k_j=0\Rightarrow G\beta_i=k_i\beta_i$

   (d) 设 A, B 都是特征不为 2 的域 F 上的 n 级对称矩阵，且 A 是可逆的，证明 A, B 可以同时合同对角化的充分必要条件是 $A^{-1}B$ 可以对角化.

(d) 取 $f(x,y)=x^TAy$，$g(x,y)=x^TBy$.

$g(x,y)=x^TA(A^{-1}B)y=f(x,A^{-1}By)$

$\Rightarrow g(y,x)=f(A^{-1}By,x)$

2 实内积空间

实线性空间 + 正定的对称双线性函数 = 实内积空间，有限维的实内积空间即欧氏空间.

2.1 实内积空间的度量

定义 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$，有柯西不等式

$$|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta|,\forall\alpha,\beta.$$

定义 $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$, 证明 d 是一个距离，即满足对称性，正定性和三角不等式.

2.2 实内积空间的同构

同构映射 σ, 不仅作为线性空间的同构映射，还要求保持内积, 即 $(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha,\beta)$. 两个欧氏空间同构的充要条件是维数相同.

2.3 例题

在 $R[x]_{n+1}$ 中定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

令

$$P_0(x)=1,P_k(x)=\frac{1}{2^kk!}\frac{d^k}{dx^k}((x^2-1)^k),k=1,2,\cdots,n.$$

证明, 这是 $R[x]_{n+1}$ 的一个正交基.

验证 $(P_k(x),x^s)=0$，$s<k$ 即可.

$\int_{-1}^{1}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k x^s dx$

$=\int_{-1}^{1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^2-1)^k sx^{s-1}dx$ 边界项为0，±1 为 $(x^2-1)^k$ 的k次根

$=\cdots=0$. 求导k次. 0，…，k-1 次导数在 ±1 处取值为0.

3 正交变换

实内积空间 V 到自身的满射 A, 满足

$$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta),\forall\alpha,\beta$$

则称 A 是 V 上的正交变换. 可以证明

1. A 是线性的;
2. A 是单的, 从而 A 是可逆的.
3. A 是 V 到自身的一个同构映射.

3.1 例题

1. 证明，实内积空间 V 到自身的满射 A 是正交变换当且仅当 A 是保持向量长度不变的线性变换。

$(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(\|\alpha+\beta\|^2-\|\alpha\|^2-\|\beta\|^2)$

$(A\alpha,A\beta)=\frac{1}{2}(\|A\alpha+A\beta\|^2-\|A\alpha\|^2-\|A\beta\|^2)$

2. 设 V 是 n 维欧氏空间，η 是 V 中一单位向量，设 P 是 V 在 $<\eta>$ 上的正交投影，令 $A=I-2P$, 称 A 为关于 $<\eta>^{\perp}$ 的镜面反射. 证明这是第二类正交变换.

特征值为 1 (n-1重)

-1 1重

3. (a) 设 A 是 2 维欧氏空间 V 上的第二类正交变化, 证明 A 是关于某一条直线的镜面反射

(b) 设 A 是 2 维欧氏空间 V 上的第一类正交变换, 证明 A 能表示为两个镜面反射的乘积

(c) 证明 n 维欧氏空间 V 上的任一正交变换都可以表示成至多 n 个镜面反射的乘积

(a,b) 考虑标准正交基 α_1, α_2 与 $A\alpha_1, A\alpha_2$. 用镜面反射 B 将 α_1 映为 $A\alpha_1$

则 $B\alpha_2 = \pm A\alpha_2$

(c) 对维数数学归纳. 考虑 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $A\alpha_1,\cdots,A\alpha_n$

取镜面反射 B_1, $B_1\alpha_1=A\alpha_1$. 考虑 $B\alpha_2,\cdots,B\alpha_n$ 与 $A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 均为 $\langle A\alpha_1\rangle^{\perp}$ 的一组基, n-1维. 利用归纳假设.

4. 设 A 是 n 维欧氏空间 V 上的一个线性变换，证明 A 是镜面反射当且仅当 A 在 V 的任意一个标准正交基下的矩阵形如 $I-2\alpha\alpha^T$，其中 α 是 $\mathbb{R}^n$中 一单位向量.

必要性. 将 η 扩充为 V 的一组正交基. 在这组基下 A 的矩阵为 $I-2\varepsilon_1\varepsilon_1^T$.

其他正交基下矩阵为 $T(I-2\varepsilon_1\varepsilon_1^T)T^{-1} = I-2(T\varepsilon_1)(T\varepsilon_1)^T$.

T 为正交阵, $\|T\varepsilon_1\| = \|\varepsilon_1\| = 1$.

充分性. 取正交基

$A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(I-2\alpha\alpha^T)$

将 α 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 一组正交基

$T=(\alpha,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 为正交阵.

在基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)T$ 下, $A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)TT^T(I-2\alpha\alpha^T)T$

$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)T(I-2\varepsilon_1^T\varepsilon_1)$

是关 $\langle\alpha_1\rangle^{\perp}$ 的镜面反射

5. (正交变换的矩阵表示) A 是实内积空间 V 上的正交变换.

(a) 假设 A 有特征值，证明特征值为 1 或-1.

$(A\alpha, A\alpha)=\lambda^2(\alpha,\alpha)$

$\Rightarrow \lambda^2=1$.

(b) 证明 A 属于不同特征值的特征向量互相正交.

不妨设 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$.

$(\alpha_1,\alpha_2)=(A\alpha_1,\alpha_2)=(A\alpha_1, AA^{-1}\alpha_2)$

$=(\alpha_1, A^{-1}\alpha_2) = -(\alpha_1,\alpha_2)$.

(c) 若 W 是 A 的一个有限维不变子空间，则 $W^{\perp}$ 也是 A 的不变子空间.

A可逆, W也是 A^{-1} 的不变子空间

$\beta\in W^{\perp}$, $\forall\alpha\in W$, $(\alpha, A\beta)=(A^{-1}\alpha,\beta)=0 \Rightarrow A\beta\in W^{\perp}$

(d) 若 $\dim V=2$, 若 A 是第一类的，那么 V 中存在一组正交基，使得 A 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, 0\le\theta\le\pi,$$

2级正交矩阵只有2种. 见书本.

如果 A 是第二类的，那么存在一组正交基，A 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(e) 若 $\dim V < \infty$, 证明 V 中存在一个标准正交基，使得此基下 A 的矩阵为分块对角：

$$\operatorname{diag}\left\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r, \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix}\right\}$$

其中 $\lambda_i = 1$ 或 -1, $0 < \theta_i < \pi$.

对维数数学归纳，见书本.

$\begin{cases} \text{有特征值 } \langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle \\ \text{无特征值，二维不变子空间} \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

4 复内积空间

- Hermite 性
- 酉变换, Hermite 变换
- 伴随变换，正规变换

4.1 例题

1. 设 A 是复/实内积空间 V 上的线性变换，如果存在 V 上的线性变换，记做 A^*, 满足

$$(A\alpha, \beta) = (\alpha, A^*\beta), \forall \alpha, \beta \in V,$$

则称 A^* 是 A 的伴随变换. 证明对于有线维的复/实内积空间, 伴随变换是存在唯一的.

存在：$(A\alpha, \beta) = \beta^* A\alpha$，由于 $R_f: \beta \to \beta^*$ 是 $V \to V^*$ 的同构，

即存在 $\beta' \in V$, $R_f\beta' = \beta^* A$ $\Rightarrow (\alpha, \beta') = (A\alpha, \beta)$.

取映射 $A^*: \beta \mapsto \beta'$，说明 A^* 线性即可.

唯一：$(A\alpha, \beta) = (\alpha, A_1^*\beta)$

$= (\alpha, A_2^*\beta)$ $\forall \alpha, \beta$

$\Rightarrow A_1^*\beta = A_2^*\beta$ $\forall \beta$ $\Rightarrow A_1^* = A_2^*$

2. (a) (Schur 引理) 设 A 是 n 阶复方阵，则 A 可酉上三角化，即存在酉矩阵 U, 使得 UAU^* 为上三角矩阵.

维数归纳. $n=1$ ✓

$n-1$时成立.

A存在特征值, 特征向量ξ, 扩充为一组标准正交基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$

$$A(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

归纳. 存在酉阵U_1, $U_1 A_1 U_1^* = \nabla$

$\Rightarrow$ 记 $U = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & U_1 \end{bmatrix} U^* A U \begin{bmatrix} 1 & \\ & U_1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & ** \\ & \nabla \end{bmatrix}$$

(b) (酉对角化的充分必要条件) 设 A 是 n 阶复方阵, A 可以酉对角化的充分必要条件是 $AA^* = A^*A$.

(b)

必要性: $A = U\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}U^*$, $A^* = U\begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}U^*$, $\Rightarrow AA^* = A^*A$.

充分性: $A = URU^*$, $A^* = UR^*U^*$

$AA^* = A^*A \Rightarrow RR^* = R^*R \Rightarrow$ R对角

依次比较对角元素