线性代数 A(II) 习题课讲义 08

Caiyou Yuan

June 6, 2022

约定这里所提及的线性空间均是域 F 上的有限维线性空间.

1 线性空间的张量积

$\otimes(u,v) = u\otimes v$

Definition 1. 对于线性空间 U,V, $\boxed{若}$存在线性空间 T 和双线性映射 $\otimes : U\times V \to T$, 满足:

$\boxed{*}$ 对于任一线性空间 W, 以及双线性映射 $f : U\times V\to W$, 都$\boxed{存在唯一}$的线性映射 $F : T\to W$, 使得 $f = F\circ\otimes$,

$U\times V = \{(u,v), u\in U, v\in V\} \longrightarrow T$

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "F"] \\ & W \end{tikzcd}$$

$F\otimes(u,v) = f(u,v)$

则称二元组 $(T,\otimes)$ 是 U,V 的张量积.

T是U,V的张量积

$F(u\otimes v) = f(u,v)$ ✓

Remark. 说明 U,V 的张量积在同构的意义下是唯一的, 即若 $(T_1,\otimes_1)$, $(T_2,\otimes_2)$ 均为 U,V 的张量积, 则 T_1 和 T_2 同构. 所以我们用 $U\otimes V$ 表示 U,V 的张量积, 这里省略了双线性映射 $\otimes$.

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "\otimes_1"] \arrow[d, "\otimes_2"'] & T_1 \arrow[dl, shift right, "F_1"'] \\ T_2 \arrow[ur, shift right, "F_2"'] & \end{tikzcd}$$

$\otimes_1$的$*$性质: 存在 $T_1\to T_2$ 线性映射 F_1

$F_1\circ\otimes_1 = \otimes_2$.

$\otimes_2$的$*$性质, $\cdots$ $T_2\to T_1$ $\cdots$ F_2

$F_2\circ\otimes_2 = \otimes_1$

$\Rightarrow F_1\circ F_2\circ\otimes_2 = \otimes_2$, $F_2\circ F_1\circ\otimes_1 = \otimes$

$\overset{?}{\Rightarrow} F_1\circ F_2 = I$, $\boxed{\mathrm{Im}\,\otimes_2}$

Remark. 说明 U,V 的张量积是存在的. 取 T 为 U,V 上的双线性函数空间, 即 $T = L(U^*,V^*;F)$.

$T: (u,v)\mapsto \boxed{u\bar{\otimes} v}$ 定义 $u\bar{\otimes} v\in L(U^*,V^*;F)$

$(u\bar{\otimes} v)(f,g) = f(u)g(v)$. $\forall f\in U^*$, $g\in V^*$

$\Downarrow$

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "f"'] & T = L(U^*,V^*;F) = \boxed{mn} \arrow[dl, "F"] \\ W & \end{tikzcd}$$

(*)性质 $\boxed{f = FT}$

Remark. 证明上述性质 $*$ 等价于

$U = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $V = (\beta_1,\cdots,\beta_m)$

$\boxed{f(\alpha_i,\beta_j),\ mn\text{个元素}}$

定义: $F: \alpha_i \otimes \beta_j \to f(\alpha_i, \beta_j)$ $\quad F(\alpha_i \otimes \beta_j) = f(\alpha_i, \beta_j)$

$T \longleftrightarrow W$

唯一性: $F_1(\alpha_i \otimes \beta_j) = F_2(\alpha_i \otimes \beta_j) \Rightarrow F_1 = F_2$

$*_1$ $T = span(\mathrm{Im}\otimes)$ $\quad y = \sum u_i \otimes v_i$

$*_2$ 对于任一线性空间 W, 以及双线性映射 $f: U \times V \to W$, 都存在线性映射 $F: T \to W$, 使得 $f = F \circ \otimes$,

$y = \sum k_i u_i \otimes v_i = \sum \tilde{u}_i \otimes v_i$, $\tilde{u}_i = k_i u_i$

$(*) \Rightarrow (*_1), (*_2)$

$(*_1), (*_2) \to (*)$ $\quad f(u,v) = F_1(u \otimes v) = F_2(u \otimes v)$

又因为 $T = span\{u \otimes v\}$

$F_1 F_2$ 基上相同, $F_1 = F_2$

若 $span(\mathrm{Im}\otimes) = T_1$ 是T子空间.

存在 $g: U \times V \to T_1$

$g(u,v) = u \otimes v$

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{g} & T_1 \\ \downarrow \otimes & \nearrow f & \\ T & & \end{array}$$

$l(x) = x$, $T_1 \to T$

利⊗的*性质, $g(u,v) = f(u \otimes v)$

Remark. $Im\otimes$ 是 T 的子空间么? 若是给出证明, 若不是举出反例.

存在 f 唯一 $\Rightarrow f(u \otimes v) = u \otimes v$

若 l 不满,

$\mathrm{Im}\otimes$ 不一定是子空间.

反例: $\mathrm{Im}\otimes = \{u \otimes v, u \in U, v \in V\}$

$\dim V \geq 2$

$V^* \otimes V^*$ 中存在不能表示为 $v^1 \otimes v^2$ 的元素.

$f: T \to T_1$

若 $x \in T$, $x \notin T_1$

$x \notin span(\mathrm{Im}\otimes)$

$\mathrm{Im}\otimes \neq T$

$\alpha \in T$, $\alpha \notin \mathrm{Im}\otimes$

$\| span(\mathrm{Im}\otimes)$

$\alpha = \sum_r u_i \otimes v_i$ $\quad \mathrm{Im}\otimes$

$f_1: T \to T_1$

$f_1(y) = \begin{cases} y, & 当 y \in T_1 \\ x, & 当 y = x \\ 口, & 其他 \end{cases}$

$f_2(y) = \begin{cases} y & 当 y \in T_1 \\ 2x & 当 y = x \\ 口, & 其他 \end{cases}$

$f_1(u \otimes v) = g(u,v)$

$f_2(u \otimes v) = g(u,v)$

Remark. 证明 $U \otimes V$ 和 $V \otimes U$ 同构.

$U \otimes V = V \otimes U$ 交换

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\otimes_2} & V \otimes U \\ \downarrow \otimes_1 & & \\ U \otimes V & & \end{array}$$

$\begin{cases} \otimes_1 的*性质 \\ \otimes_2 的*性质 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 同构.

2 多个线性空间的张量积

Definition 2. 对于线性空间 $U_i(i = 1, \cdots, N)$, 若存在线性空间 T 和 N 重线性映射 $\otimes: U_1 \times \cdots \times U_N \to T$, 满足:

* 对于任一线性空间 W, 以及 N 重线性映射 $f: U_1 \times \cdots \times U_N \to W$, 都存在唯一的线性映射 $F: T \to W$, 使得 $f = F \circ \otimes$,

则称二元组 $(T, \otimes)$ 是 $U_i(i = 1, \cdots, N)$ 的张量积.

Remark. 这里的存在唯一性, 和上一节 $N = 2$ 的情形说明方式相同.

$U_1\otimes U_2\otimes U_3=(U_1\otimes U_2)\otimes U_3$，(结合性)

Remark. 证明 $U_1\otimes U_2\otimes U_3$ 和 $(U_1\otimes U_2)\otimes U_3$ 同构. 其中 U_1,U_2,U_3 是三个线性空间.

$= U_1\otimes(U_2\otimes U_3)$

$=(U_1\otimes U_3)\otimes U_2$

3 线性变换的张量积

Definition 3. 对于线性空间 U,V, 设 A,B 分别是 U,V 上的线性变换, 则存在唯一的 $U\otimes V$ 上的线性变换, 记为 $A\otimes B$, 使得

$$(A\otimes B)(\alpha\otimes\beta)=A\alpha\otimes B\beta,\quad \forall\alpha\in V,\beta\in U. \tag{3.1}$$

称 $A\otimes B$ 为 A,B 的张量积.

Remark. 证明满足(3.1)的线性映射是存在唯一的.

$A\otimes B$，表示

$f:(\alpha,\beta)\mapsto A\alpha\otimes B\beta$

$U\times V$ 上 $\to$ $U\otimes V$ 上的双线性变换

$$\begin{array}{c} U\times V \\ \downarrow\otimes \\ U\otimes V \end{array} \xrightarrow{F}$$

Remark. 若 A_1,A_2 是 U 上的线性变换, B_1,B_2 是 V 上的线性变换, 说明 $(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)=A_1A_2\otimes B_1B_2$

$F(u\otimes v)=f(u,v)=A\alpha\otimes B\beta.$

$(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)(u\otimes v)$

$=(A_1\otimes B_1)(A_2u\otimes B_2v)$

$=(A_1A_2u)\otimes(B_1B_2v)=(A_1A_2\otimes B_1B_2)(u\otimes v)$

$\Rightarrow$ ✓

Remark. 说明 $\operatorname{Im}(A\otimes B)=\operatorname{Im}A\otimes\operatorname{Im}B$, $\operatorname{rank}(A\otimes B)=(\operatorname{rank}A)(\operatorname{rank}B)$ ✓

$\subseteq$: $x\in\operatorname{Im}(A\otimes B)$

$\exists y\in T,\ y=\sum u_i\otimes v_i$

$x=(A\otimes B)(\sum u_i\otimes v_i)$

$=\sum(A\otimes B)(u_i\otimes v_i)$

$=\sum(Au_i)\otimes Bv_i$

$=A(\sum u_i)\otimes Bv_i$

$\in(\operatorname{Im}A)\otimes(\operatorname{Im}B)$

$\supseteq$: $x\in(\operatorname{Im}A)\otimes(\operatorname{Im}B)$

$\cancel{x=y\otimes z,\ y\in\operatorname{Im}A,\ z\in\operatorname{Im}B}$

$x=\sum y_i\otimes z_i,\ y_i\in\operatorname{Im}A,\ z_i\in\operatorname{Im}B$

$=\sum Ay_i'\otimes Bz_i',\ Ay_i'=y_i,\ Bz_i'=z_i$

$\cap|$ $U\otimes V$

$\dim\operatorname{Im}(A\otimes B)=\dim(\operatorname{Im}A\otimes\operatorname{Im}B)$

$\Downarrow$

$\operatorname{rank}(A\otimes B)$

$(\dim\operatorname{Im}A)(\dim\operatorname{Im}B)$

$\operatorname{rank}A \qquad \operatorname{rank}B$

$x=(A\otimes B)(\sum y_i \otimes z_i)$

$\in \mathrm{Im}(A\otimes B)$

$U\otimes V$

Remark. 证明 $(A\otimes B)_{\Phi_1\otimes\Phi_2}=A_{\Phi_1}\otimes B_{\Phi_2}$，其中 $\Phi_1=\{\alpha_1,\cdots\alpha_n\}$, $\Phi_2=\{\beta_1,\cdots\beta_m\}$ 分别是 U,V 的一组基. A_{Φ_1},B_{Φ_2} 分别是 A,B 在基 Ψ_1,Ψ_2 下的矩阵，$A_{\Phi_1}\otimes B_{\Phi_2}$ 中的 $\otimes$ 表示矩阵的 *Kronecker* 乘积.

$A\otimes B$ $(mn\times mn)$

$\boxed{\mathcal{A}\Phi_1=\Phi_1 A_{\Phi_1}}$

$\boxed{\mathcal{B}\Phi_2=\Phi_2 B_{\Phi_2}}$

$(A\otimes B)^{ij}_{pq}=A^i_p B^j_q$ $\Rightarrow$ i行q列

$\boxed{ij}=(i-1)n+j$ $\quad$ i行p列

$(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})(\Phi_1\otimes\Phi_2)$

$(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})(\alpha_i\otimes\beta_j)$

$=(\mathcal{A}\alpha_i\otimes\mathcal{B}\beta_j)=\left(\sum_p \alpha_p A^p_i\right)\otimes\sum_q \beta_q B^q_j$

$=\sum_{pq}\alpha_p\otimes\beta_q\, A^p_i B^q_j$

$\Rightarrow A^p_i B^q_j=(A\otimes B)^{pq}_{ij}$

Remark. 设 A,B 分别是域 F 上的 n,m 级矩阵，证明 $A\otimes B$ 和 $B\otimes A$ 相似.

$A\otimes B$, $B\otimes A$

$\Downarrow$

同一个线性映射在不同基下的矩阵.

(见丘砖)

$\boxed{F=\mathbb{C}}$ $\quad A=U_1^*R_1U_1$, U^* 酉阵. $R=\begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix}$

$B=U_2^*R_2U_2$.

$A\otimes B=(U_1^*R_1U_1)\otimes(U_2^*R_2U_2)$

$=(U_1^*\otimes U_2^*)(R_1\otimes R_2)(U_1\otimes U_2)$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ $\quad \mu_1,\cdots,\mu_m$

$$R_1\otimes R_2=\begin{bmatrix}\lambda_1R_2 & & \\ & \lambda_2R_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_nR_n\end{bmatrix}$$

$U_1\otimes U_2$，酉阵.

$\boxed{\lambda_i\mu_j}$ 所有特征值

$\boxed{\text{特征值相同}}$