

# 线性代数 A(II) 习题课讲义 08

Caiyou Yuan

June 6, 2022

约定这里所提及的线性空间均是域  $F$  上的有限维线性空间.

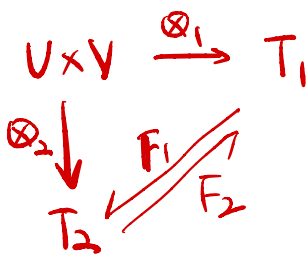
## 1 线性空间的张量积

**Definition 1.** 对于线性空间  $U, V$ , 若存在线性空间  $T$  和双线性映射  $\otimes: U \times V \rightarrow T$ , 满足:

\* 对于任一线性空间  $W$ , 以及双线性映射  $f: U \times V \rightarrow W$ , 都存在唯一的线性映射  $F: T \rightarrow W$ , 使得  $f = F \circ \otimes$ ,

则称二元组  $(T, \otimes)$  是  $U, V$  的张量积.

**Remark.** 说明  $U, V$  的张量积在同构的意义下是唯一的, 即若  $(T_1, \otimes_1), (T_2, \otimes_2)$  均为  $U, V$  的张量积, 则  $T_1$  和  $T_2$  同构. 所以我们用  $U \otimes V$  表示  $U, V$  的张量积, 这里省略了双线性映射  $\otimes$ .



$\otimes_1$  的 \* 性质: 存在  $T_1 \rightarrow T_2$  线性映射  $F_1$

$$F_1 \circ \otimes_1 = \otimes_2$$

$\otimes_2$  的 \* 性质,  $\dots T_2 \rightarrow T_1 \dots F_2$

$$F_2 \circ \otimes_2 = \otimes_1$$

$$\Rightarrow F_1 \circ F_2 \circ \otimes_2 = \otimes_2, F_2 \circ F_1 \circ \otimes_1 = \otimes_1$$

$$\Rightarrow F_1 \circ F_2 = I, \text{Im } \otimes_2$$

**Remark.** 说明  $U, V$  的张量积是存在的. 取  $T$  为  $U, V$  上的双线性函数空间, 即  $T = L(U^*, V^*; F)$

$T = (u, v) \mapsto u \otimes v$  定义  $u \otimes v \in L(U^*, V^*; F)$

$$(u \otimes v)(f, g) = f(u)g(v), \forall f \in U^*, g \in V^*$$

$$U \times V \xrightarrow{\otimes} T = L(U^*, V^*; F) = \text{Mat}$$



**Remark.** 证明上述性质 \* 等价于

$$U = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), V = (\beta_1, \dots, \beta_m)$$

$$f(\alpha_i, \beta_j), mn \text{ 元素}$$

定义:  $F: (u_i \otimes \beta_j) \rightarrow f(u_i, \beta_j)$   $F(u_i \otimes \beta_j) = f(u_i, \beta_j)$

$T \rightarrow W$   
 $T = \text{span}(\text{Im } \otimes)$   
 $y = \sum_i u_i \otimes v_i$

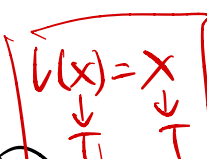
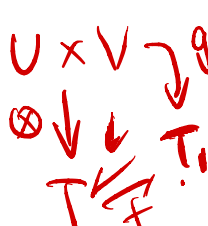
唯一性:  $F_1(u_i \otimes \beta_j) = F_2(u_i \otimes \beta_j) \Rightarrow F_1 = F_2$

\*2 对于任一线性空间  $W$ , 以及双线性映射  $f: U \times V \rightarrow W$ , 都存在线性映射  $F: T \rightarrow W$ , 使得  $f = F \circ \otimes$ ,

$(*) \Rightarrow (*_1), (*_2)$   
 $y = \sum_i k_i u_i \otimes v_i = \sum_i \bar{u}_i \otimes v_i$   $(*)_1, (*_2) \rightarrow (*)$   $f(u, v) = F(u \otimes v) = F_2(u \otimes v)$   
 $\bar{u}_i = k_i u_i$

若  $\text{span}(\text{Im } \otimes) = T$ , 是  $T$  子空间.

存在  $g: U \times V \rightarrow T$



$g(u, v) = u \otimes v$

和  $\otimes$  的性质,  $g(u, v) = f(u \otimes v)$

Remark:  $\text{Im } \otimes$  是  $T$  的子空间么? 若是给出证明, 若不是举出反例.

$\text{Im } \otimes$  不一定是子空间.

存在  $f \Rightarrow f(u \otimes v) = u \otimes v$   
 若 (不满)

反例:  $\text{Im } \otimes = \{u \otimes v, u \in U, v \in V\}$

$\dim V \geq 2$   $V^* \otimes V^*$  中存在不能表示为  $v' \otimes v''$  的元素

Remark. 证明  $U \otimes V$  和  $V \otimes U$  同构.

$U \otimes V = V \otimes U$  交换

$\text{Im } \otimes \cong T$

$\alpha \in T, \alpha \notin \text{Im } \otimes$

$f: T \rightarrow T$   
 若  $x \in T, x \notin T$   
 $x \notin \text{span}(\text{Im } \otimes)$

$U \times V \xrightarrow{\otimes} V \otimes U$



$\otimes_1$  的性质  
 $\otimes_2$  的性质  
 $\Rightarrow$  同构.

$\text{span}(\text{Im } \otimes)$

$\alpha = \sum_i u_i \otimes v_i$

$f: T \rightarrow T$   
 $f_1(y) = \begin{cases} y, & \text{当 } y \in T \\ x, & \text{当 } y = x \\ \square, & \text{其他} \end{cases}$   
 $f_2(y) = \begin{cases} y, & \text{当 } y \in T \\ 2x, & \text{当 } y = x \\ \square, & \text{其他} \end{cases}$   
 $f_1(u \otimes v) = g(u, v)$   
 $f_2(u \otimes v) = g(u, v)$

## 2 多个线性空间的张量积

Definition 2. 对于线性空间  $U_i (i = 1, \dots, N)$ , 若存在线性空间  $T$  和  $N$  重线性映射  $\otimes: U_1 \times \dots \times U_N \rightarrow T$ , 满足:

\* 对于任一线性空间  $W$ , 以及  $N$  重线性映射  $f: U_1 \times \dots \times U_N \rightarrow W$ , 都存在唯一的线性映射  $F: T \rightarrow W$ , 使得  $f = F \circ \otimes$ ,

则称二元组  $(T, \otimes)$  是  $U_i (i = 1, \dots, N)$  的张量积.

Remark. 这里的存在唯一性, 和上一节  $N = 2$  的情形说明方式相同.

$$U_1 \otimes U_2 \otimes U_3 = (U_1 \otimes U_2) \otimes U_3, \text{ (结合性)}$$

Remark. 证明  $U_1 \otimes U_2 \otimes U_3$  和  $(U_1 \otimes U_2) \otimes U_3$  同构. 其中  $U_1, U_2, U_3$  是三个线性空间.

$$\begin{aligned} &= U_1 \otimes (U_2 \otimes U_3) \\ &= (U_1 \otimes U_3) \otimes U_2 \end{aligned}$$

### 3 线性变换的张量积

Definition 3. 对于线性空间  $U, V$ , 设  $A, B$  分别是  $U, V$  上的线性变换, 则存在唯一的  $U \otimes V$  上的线性变换, 记为  $A \otimes B$ , 使得

$$(A \otimes B)(\alpha \otimes \beta) = A\alpha \otimes B\beta, \quad \forall \alpha \in U, \beta \in V. \quad (3.1)$$

称  $A \otimes B$  为  $A, B$  的张量积.

Remark. 证明满足(3.1)的线性映射是存在唯一的.

$A \otimes B$ , 表示

$$f: (u, v) \mapsto Au \otimes Bv$$

$U \times V \xrightarrow{f} U \otimes V$  上的双线性变换

Remark. 若  $A_1, A_2$  是  $U$  上的线性变换,  $B_1, B_2$  是  $V$  上的线性变换, 说明  $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = A_1 A_2 \otimes B_1 B_2$

$$F(u \otimes v) = f(u, v) = Au \otimes Bv$$

$$\begin{aligned} &(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)(u \otimes v) \\ &= (A_1 \otimes B_1)(A_2 u \otimes B_2 v) \\ &= (A_1 A_2 u) \otimes (B_1 B_2 v) = (A_1 A_2 \otimes B_1 B_2)(u \otimes v) \end{aligned}$$

Remark. 说明  $\text{Im}(A \otimes B) = \text{Im} A \otimes \text{Im} B$ ,  $\text{rank}(A \otimes B) = (\text{rank} A)(\text{rank} B)$

$$\begin{aligned} \subseteq & \exists x \in \text{Im}(A \otimes B) \\ & \exists y \in T, y = \sum u_i \otimes v_i \\ & x = (A \otimes B)(\sum u_i \otimes v_i) \\ & = \sum (A \otimes B)(u_i \otimes v_i) \\ & = \sum (A u_i) \otimes (B v_i) \\ & \in (\text{Im} A) \otimes (\text{Im} B) \\ \supseteq & x \in (\text{Im} A) \otimes (\text{Im} B) \end{aligned}$$

$$\dim \text{Im}(A \otimes B) = \dim(\text{Im} A \otimes \text{Im} B)$$

$$\text{rank}(A \otimes B)$$

$$(\dim \text{Im} A)(\dim \text{Im} B) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{rank} A \quad \text{rank} B$$

$$x = y \otimes z, y \in \text{Im} A, z \in \text{Im} B$$

$$\begin{aligned} x &= \sum y_i \otimes z_i, y_i \in \text{Im} A, z_i \in \text{Im} B \\ &= \sum A y_i \otimes B z_i, A y_i = y_i, B z_i = z_i \end{aligned}$$

$$x = (A \otimes B) (\sum y_i \otimes z_i)$$

$$\in \text{Im}(A \otimes B)$$

$$U \otimes V$$

Remark. 证明  $(A \otimes B)_{\Phi_1 \otimes \Phi_2} = A_{\Phi_1} \otimes B_{\Phi_2}$ , 其中  $\Phi_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ,  $\Phi_2 = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  分别是  $U, V$  的一组基.  $A_{\Phi_1}, B_{\Phi_2}$  分别是  $A, B$  在基  $\Psi_1, \Psi_2$  下的矩阵,  $A_{\Phi_1} \otimes B_{\Phi_2}$  中的  $\otimes$  表示矩阵的 Kronecker 乘积.

$$A \otimes B \quad (mn \times mn)$$

$$(A \otimes B)_{pq}^{ij} = A_{pq}^i B_{pq}^j \Rightarrow \begin{matrix} i \text{ 行 } p \text{ 列} \\ j \text{ 行 } q \text{ 列} \end{matrix}$$

$$i, j = (i-1)n + j \quad i \text{ 行 } p \text{ 列}$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} [A]_{\Phi_1} = \Phi_1 A \Phi_1 \\ [B]_{\Phi_2} = \Phi_2 B \Phi_2 \end{matrix} \\ & (A \otimes B)_{(\Phi_1 \otimes \Phi_2)} \\ & (A \otimes B)(\alpha_i \otimes \beta_j) \end{aligned}$$

$$= (A \alpha_i \otimes B \beta_j) = \left( \sum_p \alpha_p A_{pi}^p \right) \otimes \sum_q \beta_q B_{qj}^q$$

Remark. 设  $A, B$  分别是域  $F$  上的  $n, m$  级矩阵, 证明  $A \otimes B$  和  $B \otimes A$  相似.

$$A \otimes B, B \otimes A$$

$\Downarrow$

同一个线性映射在不同基下的矩阵.

(见丘砖)

$$\begin{aligned} & = \sum_{pq} \alpha_p \otimes \beta_q \begin{pmatrix} A_{pi}^p & B_{qj}^q \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow A_{pi}^p B_{qj}^q = (A \otimes B)_{ij}^{pq} \end{aligned}$$

$$\boxed{F=C} \quad A = U_1^* R_1 U_1, \quad U_1^* \text{ 酉阵. } R_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$B = U_2^* R_2 U_2.$$

$$A \otimes B = (U_1^* R_1 U_1) \otimes (U_2^* R_2 U_2)$$

$$= (U_1^* \otimes U_2^*) (R_1 \otimes R_2) (U_1 \otimes U_2)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \quad \mu_1, \dots, \mu_m$

$$R_1 \otimes R_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 R_2 & & \\ & \lambda_2 R_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n R_2 \end{bmatrix}$$

$U_1 \otimes U_2$ , 酉阵.

$\lambda_i \mu_j$  所有特征值

特征值相同